풀이

STEP II 2015, 문제 2

순수수학 • 삼각형의 기하

STEP II 2015, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

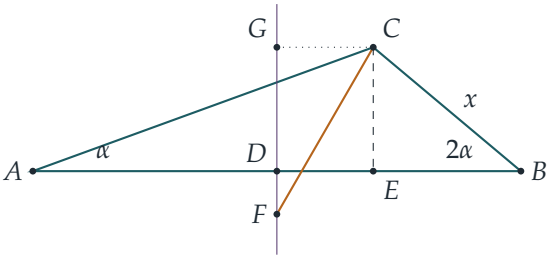
step.maths.org/questions/15-s2-q2

핵심 아이디어

첫 번째 결과는 사인법칙(sine rule)에 $\sin 3\alpha$에 대한 삼배각 공식(triple-angle formula)을 더하면 얻어진다. DE를 구할 때는 모든 길이를 AB를 따라 한쪽 끝에서부터 잰다. CE 양쪽에 있는 직각삼각형(right-angled triangle)에서 AE와 BE를 바로 얻을 수 있다. DE의 값은 놀라울 만큼 간단하게 나오는데, 바로 이 간단함 덕분에 삼등분(trisection)이 성립한다. 이 값은 C가 수직이등분선(perpendicular bisector)에서 얼마나 떨어져 있는지 알려 주고, 이를 $CF = x$와 비교하면 한 각이 결정된다.

풀이

풀이 전체에서 C에서의 각은 $\angle ACB = \pi - 3\alpha$이고, 2α가 예각이므로 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$이다.



길이 AB

$\sin(\pi - 3\alpha) = \sin 3\alpha$를 이용하면 사인법칙에 의해

$$\frac{AB}{\sin 3\alpha} = \frac{x}{\sin \alpha}.$$

이제 삼배각 공식 $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$를 쓰고 $\sin\alpha \neq 0$으로 나누면

$$AB = x\,\frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{\sin\alpha} = (3 - 4\sin^2\alpha)\,x,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

길이 DE

A와 B에서의 각이 모두 예각이므로, C에서 내린 수선의 발(foot of the perpendicular) E는 A와 B 사이에 있다. 직각삼각형 CEB에서

$$BE = x\cos 2\alpha, \qquad CE = x\sin 2\alpha.$$

따라서

$$AE = AB - BE = x(3 - 4\sin^2\alpha - (1 - 2\sin^2\alpha)) = x(2 - 2\sin^2\alpha) = 2x\cos^2\alpha,$$
$$AD = \tfrac{1}{2}AB = x(\tfrac{3}{2} - 2\sin^2\alpha).$$

두 식을 빼면

$$AE - AD = x(2 - 2\sin^2\alpha - \tfrac{3}{2} + 2\sin^2\alpha) = \tfrac{1}{2}x.$$

이 값은 양수이므로 E는 D와 B 사이에 있고,

$$DE = \tfrac{1}{2}x,$$

이며 이는 α에 무관하다.

삼등분

C에서 AB의 수직이등분선 DF에 내린 수선의 발을 G라 하자. CE와 GD가 모두 AB에 수직이므로 $CGDE$는 직사각형(rectangle)이다. 따라서 $CG = DE = \frac{1}{2}x$이고, CG는 AB에 평행하다. 즉 CG는 CE에 수직이다.

? **생각해 보기** $CF = x$를 어떻게 각으로 바꿀 수 있을까?

삼각형 CGF는 G에서 직각이고, 빗변(hypotenuse)은 $CF = x$, 한 변은 $CG = \frac{1}{2}x$이다. 그러므로

$$\cos\angle GCF = \frac{CG}{CF} = \frac{1}{2}, \qquad \text{따라서} \qquad \angle GCF = \frac{\pi}{3}.$$

수직이등분선 위에서 C로부터 거리가 x인 점은 G의 양쪽에 하나씩, 모두 두 개 있다. 반직선(ray) CE(AB를 향해 아래쪽을 가리킨다)에서 시작하여 A 쪽으로 각을 재면, 반직선 CG는 $\frac{\pi}{2}$의 각에 있다. 따라서 후보가 되는 두 반직선 CF는 각각 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$($G$ 아래쪽의 점)과 $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$($G$ 위쪽의 점)의 각에 있다.

이제 둘 중 어느 것이 AC에 대하여 B와 같은 쪽에 있는지 정한다. 직각삼각형 ACE에서 $\angle ACE = \frac{\pi}{2} - \alpha$이므로, 반직선 CA는 같은 쪽으로 CE에서 $\frac{\pi}{2} - \alpha$의 각에 있다. 직선 AC에 대하여 B 쪽에 있는 C에서의 반직선은, 이렇게 잰 각이 $\frac{\pi}{2} - \alpha$보다 작은 것(또는 CE의 반대쪽, 즉 B 쪽에 있는 것)이다. $\alpha < \frac{\pi}{4}$이므로

$$\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{5\pi}{6},$$

이고, 따라서 G 아래쪽의 점은 B 쪽에 있고 G 위쪽의 점은 그렇지 않다. 그러므로 F는 아래쪽 점이고, $\angle ECF = \frac{\pi}{6}$이며, 반직선 CF는 각 ACE의 내부, 곧 $\angle ACB$의 내부에 있다. 따라서

$$\angle ACF = \angle ACE - \angle ECF = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - \alpha = \frac{1}{3}(\pi - 3\alpha) = \frac{1}{3}\angle ACB.$$

즉 CF는 $\angle ACB$에서 CA 쪽의 3분의 1을 잘라 낸다($\angle FCB = \frac{2}{3}\angle ACB$이다). 그러므로 직선 FC는 각 ACB를 삼등분한다.

검산

- $\alpha = \frac{\pi}{6}$이면 삼각형의 세 각은 $30°, 60°, 90°$이고, $AB = (3-1)x = 2x$로 익숙한 빗변의 길이가 나온다. 이때 $AE = 2x\cos^2 30° = \frac{3}{2}x$이고 $AD = x$이므로 $DE = \frac{1}{2}x$이다. C에서의 각은 $90°$이고, $\angle ACF = 60° - 30° = 30°$로 그 3분의 1이다.
- $\alpha = 20°$, $x = 1$이면 $AB \approx 2.532$이고 $\angle ACB = 120°$이다. 좌표를 이용해 F를 직접 작도하면 $\angle ACF = 40°$를 얻는다. 세 결과 모두 무작위로 만든 수천 개의 삼각형에 대해 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- F를 G 위쪽의 점으로 잡는 실수. 그 점도 C에서 거리가 x이지만 AC의 반대쪽에 있으며, 문제에서 어느 쪽인지를 지정한 것은 바로 이 때문이다.
- DE를 길이의 차로 쓰기 전에 E가 A와 B 사이에 있는지(그리고 D의 어느 쪽에 있는지) 확인하는 것을 잊는 실수.

STEP 너머

자와 컴퍼스(ruler and compasses)로 일반적인 각을 삼등분하는 것은 불가능하며, 이 사실은 체론(field theory)으로 증명된다. $60°$를 삼등분하려면 기약 삼차다항식(irreducible cubic)의 근을 작도해야 하는데, 작도 가능한(constructible) 길이는 언제나 이차방정식을 거듭 쌓아 올린 것만 만족하기 때문이다. 여기서는 삼각형이 추가 정보(B에서의 각이 A에

서의 각의 두 배)를 주고, 바로 그 덕분에 간단한 작도로 삼등분이 가능하다. 더 우아한 삼각형 기하를 보려면 콕서터(Coxeter)와 Greitzer의 *Geometry Revisited*를, 불가능성의 증명은 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.