풀이

STEP II 2015, 문제 13

확률과 통계 • 지수분포의 적률

> **STEP II 2015, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q13

핵심 아이디어

비용은 고정된 금액 ky에, 홍수가 대비 수준을 넘지 않으면 0인 확률적인 금액을 더한 것이다. 따라서 모든 것은 홍수가 대비한 높이를 넘는 초과분 $W = \max(X - y, 0)$의 적률(moments)로 귀결된다. 지수분포(exponential distribution)는 **무기억성**(*memoryless*)을 가진다. 즉 $X > y$라는 조건 아래에서 초과분 $X - y$는 다시 같은 모수의 지수분포를 따른다. 이 성질 덕분에 기댓값(expectation)과 분산(variance)이 모두 한 줄짜리 계산이 된다.

풀이

$p = \mathrm{P}(X > y) = \int_y^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda y}$라 쓰고,

$$W = \begin{cases} X - y & \text{경우: } X > y, \\ 0 & \text{경우: } X \le y, \end{cases} \qquad \text{이때} \qquad C = ky + aW.$$

라 하자. 여기서 $y \ge 0$은 미리 정해 두는 상수이므로 ky는 확률적인 양이 아니다.

소문항 (i)

$X \le y$일 때 $W = 0$이므로

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(W) &= \int_y^\infty (x - y)\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty u\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda(u+y)}\,\mathrm{d}u \qquad (u = x - y) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda y} \int_0^\infty u\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\lambda y} \cdot \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 모수가 λ인 지수분포의 평균이 $\frac{1}{\lambda}$라는 사실을 이용했다(또는 부분적분(integration by parts)을 해도 된다). 따라서

$$\mathrm{E}(C) = ky + a\,\mathrm{E}(W) = ky + \frac{a}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda y},$$

이고, 이것이 보이려던 식이다.

최소화. $y \geq 0$에 대하여 $g(y) = ky + \frac{a}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda y}$라 하자. 그러면

$$g'(y) = k - a\mathrm{e}^{-\lambda y}, \qquad g''(y) = a\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y} > 0,$$

이므로 g'은 $g'(0) = k - a$에서 시작하여 $y \to \infty$일 때 k를 향해 순증가한다.

생각해 보기 왜 그냥 $g'(y) = 0$으로 놓고 끝낼 수 없을까?

y가 $y \geq 0$으로 제한되어 있고, 정류점(stationary point) $\mathrm{e}^{-\lambda y} = k/a$는 $k/a \leq 1$일 때에만 그 범위 안에 있기 때문이다. 그래서 a/k의 값에 따라 경우를 나눈다.

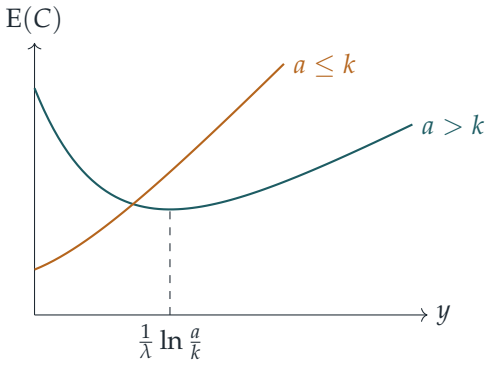
- $a/k > 1$. 이때 $g'(0) = k - a < 0$이고,

  $$y = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{a}{k} > 0.$$

  에서 $g'(y) = 0$이다. g'이 증가하므로 g는 이 점 앞에서 감소하고 뒤에서 증가한다. 따라서 이 점은 $y \geq 0$에서의 전역 최솟값(global minimum)을 준다. 최소 기대 비용은 $\frac{k}{\lambda}\left(1 + \ln\frac{a}{k}\right)$이다.

- $a/k \leq 1$. 이때 모든 $y > 0$에 대하여 $g'(y) > g'(0) = k - a \geq 0$이므로 g는 $y \geq 0$에서 순증가하고, 최솟값은 $y = 0$에서 얻어진다. 즉 아무런 대비도 하지 않는 것이 최선이다. 이때 기대 비용은 $\frac{a}{\lambda}$이다.

이는 이치에 맞는다. 대비를 1미터 더 할 때마다 비용 k는 확실히 들지만, 절약되는 a는 홍수가 그 높이까지 차올랐을 경우에만 얻어진다. $a \leq k$라면 절약분이 지출을 결코 정당화할 수 없다.



소문항 (ii)

상수 ky를 더해도 분산은 변하지 않으므로 $\mathrm{Var}(C) = a^2\,\mathrm{Var}(W)$이다. 이차 적률(second moment)은 같은 치환 $u = x - y$를 써서

$$\mathrm{E}(W^2) = \int_y^\infty (x-y)^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda y}\int_0^\infty u^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\lambda y}\cdot\frac{2}{\lambda^2},$$

이다. 모수가 λ인 지수분포를 따르는 확률변수 U에 대하여 $\mathrm{E}(U^2) = \mathrm{Var}(U) + \mathrm{E}(U)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}$이기 때문이다. 따라서 $p = \mathrm{e}^{-\lambda y}$로 두면

$$\mathrm{Var}(C) = a^2\left(\frac{2p}{\lambda^2} - \frac{p^2}{\lambda^2}\right) = \frac{a^2}{\lambda^2}\,\mathrm{e}^{-\lambda y}\left(2 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\right).$$

이다.

미리 지출하는 금액은 ky이고, $k > 0$이므로 이는 y에 대하여 증가한다. 따라서 y가 증가할 때 $\mathrm{Var}(C)$가 감소함을 보이면 된다. 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(2\mathrm{e}^{-\lambda y} - \mathrm{e}^{-2\lambda y}\right) = -2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y} + 2\lambda\mathrm{e}^{-2\lambda y} = -2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\right),$$

이고, $y > 0$이면 $0 < \mathrm{e}^{-\lambda y} < 1$이므로 이 값은 순음수이다. 따라서 $\mathrm{Var}(C)$는 $y \geq 0$에서 y에 대하여 순감소한다. 즉 대비에 많이 지출할수록 비용의 분산이 작아지며, 이로써 증명이 끝난다. (같은 말로, $p(2-p) = 1 - (1-p)^2$은 $[0,1]$에서 p에 대하여 증가하고, $p = \mathrm{e}^{-\lambda y}$는 y에 대하여 감소한다.)

검산

- $y = 0$에서 $C = aX$이므로 $\mathrm{E}(C) = a/\lambda$, $\mathrm{Var}(C) = a^2/\lambda^2$이고, 둘 다 공식과 일치한다.
- $y \to \infty$일 때 분산은 0으로 수렴한다. 엄청나게 높은 홍수 방벽을 쌓으면 불확실성은 사실상 사라지고 고정 비용 ky만 남는다.
- $k = 1$, $a = 3$, $\lambda = 0.5$, $y = 1.2$일 때 공식은 $\mathrm{E}(C) \approx 4.493$, $\mathrm{Var}(C) \approx 28.67$을 준다. 백만 년에 대한 컴퓨터 모의실험(simulation)에서는 4.496과 28.68을 얻었다. 이 값들에 대한 최적 높이는 $2\ln 3 \approx 2.197$이며, 컴퓨터 탐색으로도 확인되었다.

흔한 실수

- $a(x-y)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$를 y부터가 아니라 0부터 적분하는 것. $X \leq y$일 때는 홍수 피해가 없다.
- 경계 조건 $y \geq 0$을 잊고, $a < k$여서 값이 음수가 되는 경우에도 $y = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{a}{k}$를 답으로 내는 것.
- 분산에 ky를 포함시키는 것. ky는 상수이므로 분산에 아무런 기여도 하지 않는다.

STEP 너머

양 $\mathrm{E}\big(\max(X-y,0)\big)$는 정확히 행사가격(strike)이 y인 콜옵션(call option)의 수익이고, 최적 조건 $\mathrm{P}(X > y) = k/a$는 운용과학(operations research)의 고전적인 "신문 판매원(newsvendor)" 규칙이다. 즉 대비의 한계비용(marginal cost)이 기대 한계 절약분과 같아지는 수준을 택하는 것이다. 이처럼 깔끔한 답을 가능하게 한 무기억성은 연속분포(continuous distribution) 가운데 지수분포만이 가지는 특별한 성질이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 지수분포와 확률변수의 함수의 기댓값을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.