풀이

STEP II 2015, 문제 11

역학 • 운동량과 에너지

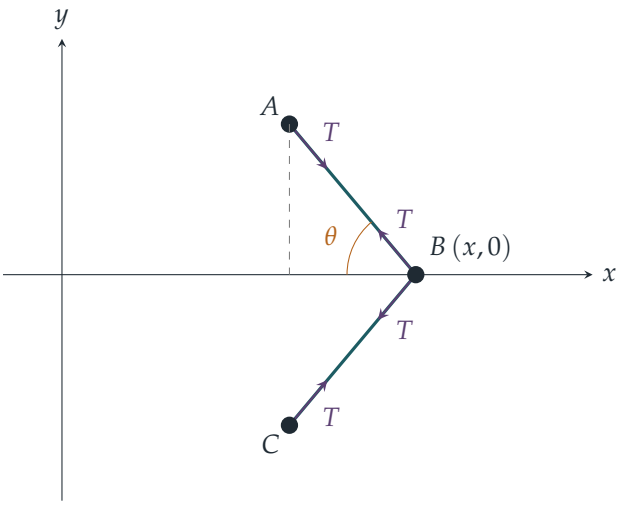
> **STEP II 2015, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q11

핵심 아이디어

운동이 x축에 대하여 대칭을 유지하므로, 두 좌표 x와 θ만으로 계 전체를 기술할 수 있다. 탁자는 매끄럽고(smooth) 줄은 가볍고 늘어나지 않으므로(inextensible), 두 가지 양이 보존된다(conserved). 바로 x 방향의 운동량(momentum)과 운동에너지(kinetic energy)이다. 이 두 보존 법칙에서 (ii)의 두 식이 곧바로 나오며, 두 번째 식을 주의 깊게 읽으면 $\dot{\theta}$가 결코 0이 될 수 없음을 알 수 있다. 이 사실 하나로 (iii)과 (iv)가 모두 해결된다.

풀이

A, B, C를 입자로, 줄을 가볍고 늘어나지 않는 것으로 모형화한다. 중력과 수직항력(normal reaction)은 연직 방향이므로, 수평 방향의 힘은 장력(tension)뿐이고 이는 계의 내력이다.



소문항 (i)

A는 음의 x 방향과 각 θ를 이루는 직선을 따라 B로부터 거리 a만큼 떨어져 있으므로

$$A = (x - a\cos\theta,\ a\sin\theta).$$

$\cos\theta$와 $\sin\theta$에 연쇄법칙(chain rule)을 적용하여 t에 대해 미분하면

$$\dot{\mathbf{r}}_A = (\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta},\ a\cos\theta\,\dot{\theta}),$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다(여기서 $\dot{x} = v$는 B의 속력이다).

처음 설정과 충격량(impulse)이 모두 x축에 대한 대칭 변환에서 변하지 않으므로, 운동은 계속 대칭을 유지한다. 즉 $C = (x - a\cos\theta,\ -a\sin\theta)$이고 그 속도는 $(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta},\ -a\cos\theta\,\dot{\theta})$이다.

소문항 (ii)

먼저 초깃값을 구한다. 충격이 가해지는 순간 두 줄은 모두 y축 위에 놓여 B의 새 속도와 수직이므로, 줄이 A나 C를 갑자기 잡아당길 필요가 없다. 따라서 이들은 정지 상태에서 출발하고, $\dot{x} = u$이다. 전체 x-운동량은 mu이고 운동에너지는 $\frac{1}{2}mu^2$이다.

운동량. 외부의 수평 방향 힘이 없으므로 전체 x-운동량은 계속 mu와 같다.

$$m\dot{x} + 2m(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta}) = mu \quad\Longrightarrow\quad 3\dot{x} + 2a\dot{\theta}\sin\theta = u. \tag{1}$$

(A와 C의 y-운동량은 당연히 서로 상쇄된다.) 여기서 우변은 B의 처음 속력인 u이다. 문제지에는 v로 인쇄되어 있지만, v는 이미 $\dot{x}$를 나타내는 데 쓰였으므로 이는 u의 오식임이 분명하다.

에너지. 줄이 가볍고 늘어나지 않으므로 장력이 계 전체에 하는 알짜 일은 없고, 나머지 힘들도 일을 하지 않는다. 따라서 A와 C가 충돌하기 전까지 운동에너지가 보존된다.

$$\dot{x}^2 + 2\Big[(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta})^2 + a^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2\Big] = u^2. \tag{2}$$

$s = \sin\theta$, $c = \cos\theta$라 하면 (1)에서

$$\dot{x} = \tfrac{1}{3}(u - 2as\dot{\theta}), \qquad \dot{x} + as\dot{\theta} = \tfrac{1}{3}(u + as\dot{\theta}).$$

이를 (2)에 대입하면 교차항 $\mp 4uas\dot{\theta}$가 상쇄된다.

$$\tfrac{1}{9}(u - 2as\dot{\theta})^2 + \tfrac{2}{9}(u + as\dot{\theta})^2 + 2a^2c^2\dot{\theta}^2 = \tfrac{1}{9}(3u^2 + 6a^2s^2\dot{\theta}^2) + 2a^2c^2\dot{\theta}^2 = u^2.$$

따라서 $a^2\dot{\theta}^2(\frac{2}{3}s^2 + 2c^2) = \frac{2}{3}u^2$, 즉 $a^2\dot{\theta}^2(s^2 + 3c^2) = u^2$이다. $s^2 + 3c^2 = 3 - 2s^2$이므로

$$\dot{\theta}^2 = \frac{u^2}{a^2(3 - 2\sin^2\theta)},$$

이고, 이것이 두 번째 결과이다(앞에서와 마찬가지로 v를 u로 읽는다).

소문항 (iii)

$3 - 2\sin^2\theta \le 3$이므로 소문항 (ii)에서

$$\dot{\theta}^2 \ge \frac{u^2}{3a^2} > 0.$$

따라서 $\dot{\theta}$는 결코 0이 되지 않는다. 충돌과 충돌 사이에서 이는 연속이므로 부호가 바뀌지 않고, θ는 단조적으로(monotonically) 변한다.

처음에 A는 정지해 있으므로 소문항 (i)에서 $\dot{x} + a\dot{\theta} = 0$, 즉 $\dot{\theta} = -u/a < 0$이다. 따라서 θ는 $\frac{\pi}{2}$에서부터 꾸준히 감소한다. A와 C는 항상 같은 x좌표를 가지고 y좌표는 $\pm a\sin\theta$이므로, 두 입자는 정확히 $\sin\theta = 0$일 때 만난다. 첫 번째 충돌은 B의 뒤쪽인 $\theta = 0$에서 일어난다.

생각해 보기 충돌은 $\dot{x}$와 $\dot{\theta}$에 어떤 영향을 주는가?

$\theta = 0$에서 두 줄은 모두 x축 위에 놓이고, A와 C의 x방향 속도는 같으며 y방향 속도는 $\pm a\dot{\theta}$이다. 두 입자는 y 방향으로 다가오므로 이들 사이의 충격량은 y 방향이다. 이는 줄과 수직이므로 충격 장력이 생기지 않고, 모든 x방향 속도는 변하지 않는다. 질량이 같은 두 물체의 탄성 충돌(elastic collision)에서는 중심을 잇는 직선 방향의 속도 성분이 서로 교환된다. 따라서 A의 y방향 속도는 $a\dot{\theta}$에서 $-a\dot{\theta}$로 바뀐다. 즉 충돌은 단지 $\dot{\theta}$의 부호를 뒤집을 뿐이고, $\dot{x}$는 그대로이다.

충돌 후의 운동량과 에너지는 충돌 전과 같으므로, (1)과 (2), 따라서 (ii)의 두 결과는 다음 단계의 운동에서도 성립한다. 이제 $\dot{\theta} > 0$이고, 앞에서와 마찬가지로 이는 0이 될 수

없다. 따라서 θ는 0에서부터 꾸준히 증가하며, $\sin\theta = 0$이 되는 다음 값은 $\theta = \pi$이다. $\dot\theta \geq u/(a\sqrt{3})$이므로 θ는 유한한 시간, 많아야 $\pi a\sqrt{3}/u$ 안에 그 값에 도달한다. 두 번째 충돌은

$$\theta = \pi,$$

에서 일어나며, 이때 A와 C는 B의 **앞쪽에서** 만난다.

소문항 (iv)

운동 전체에 걸쳐 $\theta \in [0, \pi]$이므로 $\sin\theta \geq 0$이다. $v = \dot x = 0$이면 (1)에서 $2a\dot\theta\sin\theta = u$이고, 이를 제곱하여 (ii)를 이용하면

$$4a^2\sin^2\theta \cdot \frac{u^2}{a^2(3-2\sin^2\theta)} = u^2 \iff 4\sin^2\theta = 3 - 2\sin^2\theta \iff \sin^2\theta = \tfrac{1}{2}.$$

따라서 가능한 값은 $\theta = \frac{\pi}{4}$와 $\theta = \frac{3\pi}{4}$이다.

> **생각해 보기** 제곱하면서 부호 정보를 잃었다. 실제로 필요한 부호는 무엇인가?

$2a\dot\theta\sin\theta = u$를 제곱했는데, $u > 0$이므로 $\dot\theta\sin\theta > 0$, 즉 $\dot\theta > 0$이어야 한다. $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$에서 $\dot\theta^2 = \frac{u^2}{2a^2}$이므로 $\dot\theta = \pm\frac{u}{a\sqrt{2}}$이고 $2a\dot\theta\sin\theta = \pm u$이다. (1)에서

- $\dot\theta > 0$이면 $\dot x = \frac{1}{3}(u - u) = 0$이다.
- $\dot\theta < 0$이면 $\dot x = \frac{1}{3}(u + u) = \frac{2}{3}u$이다.

따라서 답은 "아니다"이다. 첫 번째 흔들림(θ가 $\frac{\pi}{2}$에서 0으로 감소)에서 θ는 $v = \frac{2}{3}u$인 상태로 $\frac{\pi}{4}$를 지난다. 첫 번째 충돌과 두 번째 충돌 사이(θ가 0에서 π로 증가)에서는 $\theta = \frac{\pi}{4}$와 $\theta = \frac{3\pi}{4}$에서 모두 $v = 0$이다. 두 번째 충돌 후에는 $\dot\theta$가 다시 음수가 되므로, π에서 0으로 되돌아오는 흔들림에서는 두 값에서 모두 $v = \frac{2}{3}u$이다. 그 뒤로는 이 양상이 반복된다. 즉 이 각도들에서 $v = 0$이 되는 것은 θ가 증가하는 흔들림에서뿐이다.

검산

- 처음 $\theta = \frac{\pi}{2}$일 때 (ii)는 $\dot\theta^2 = u^2/a^2$을 주며, 이는 A가 정지해 있다는 사실에서 직접 구한 $\dot\theta = -u/a$와 일치한다.
- (1)에서 $\dot x = \frac{u}{3}\left(1 - \frac{2a\dot\theta\sin\theta}{u}\right)$이다. $\theta = 0$에서 이 값은 $\frac{u}{3}$이다. 즉 세 입자가 모두 $\frac{u}{3}$으로 함께 움직이는데, 이는 질량중심(centre of mass)의 속도로서, 줄이 x축을 따라 곧게 펴져 있을 때 마땅히 그래야 한다. 증가하는 흔들림에서 $\theta = \frac{\pi}{2}$일 때 $\dot x = -\frac{u}{3}$이므로 B는 한동안 뒤로 움직이며, 이것이 v가 0을 두 번 지나는 이유이다.
- 세 입자를 매우 단단한 용수철로 연결하고 $a = u = 1$로 둔 컴퓨터 시뮬레이션은 (ii)의

두 식을 모두 재현한다. 시뮬레이션에서 첫 번째 충돌은 $\theta = 0$에서, 두 번째 충돌은 $\theta = \pi$에서 일어나며, v는 증가하는 흔들림에서 $\theta \approx 0.785$와 2.356 근처에서만 부호가 바뀌고 그때 $\dot{\theta} \approx 0.707$이다. 첫 번째 흔들림에서는 $\theta = \frac{\pi}{4}$일 때 $v \approx 0.67$이다.

흔한 실수

- (1)의 우변을 $\dot{x}$로 보는 것. 우변은 충격량에 의해 정해지는 상수 u이다.
- 충돌 후 θ가 다시 $\frac{\pi}{2}$ 쪽으로 올라가서 두 번째 충돌도 $\theta = 0$에서 일어난다고 가정하는 것. $\dot{\theta}$의 부호가 뒤집히면 θ는 $\frac{\pi}{2}$를 **지나서** 증가하며, $\dot{\theta}^2$이 0으로부터 떨어진 값으로 아래로 유계이므로 π에 이르기 전에는 아무것도 이를 멈출 수 없다.
- 소문항 (iv)에서 제곱하면 $\dot{\theta}$의 부호를 잃는다는 사실을 잊는 것.

STEP 너머

x와 θ를 좌표로 택하고 이들로 운동에너지를 나타내는 것은 대학 1학년에서 배우는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 출발점이다. 라그랑주 역학에서는 에너지에 x가 나타나지 않으므로(즉 x가 "무시 가능한(ignorable)" 좌표이므로) x-운동량 보존이 저절로 나타난다. 그러면 여기에서와 마찬가지로 에너지 방정식이 문제를 θ에 대한 하나의 1계 방정식으로 환원한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 입자계에 대한 운동량 방법과 에너지 방법을 매우 철저하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.