풀이

STEP II 2015, 문제 10

역학 • 구속 운동

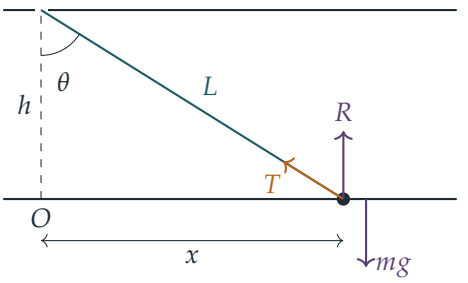
> **STEP II 2015, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q10

핵심 아이디어

이 문제는 구속 조건(constraint) 문제이다. 입자의 운동은 줄에 의해 완전히 결정되므로, 운동학(kinematics)을 먼저 다루고 힘은 그다음에 다룬다. 천장 아래에 있는 줄의 길이를 구멍 바로 아래 점으로부터 입자까지의 수평 거리로 나타낸 뒤 시간에 대하여 미분한다. 이때 그 길이의 변화율은 이미 알고 있다. 가속도를 구하고 나면 수평 방향으로 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 적용하여 장력(tension)을 얻고, 연직 방향으로 힘을 분해하여 수직항력(normal reaction)을 얻는다. 입자가 바닥 위에 있는 동안 수직항력은 음이 아니어야 한다.

풀이

입자를 매끄러운 수평 바닥 위의 점으로, 줄을 가볍고 늘어나지 않는 것으로 모형화한다. 따라서 장력 T는 줄 전체에서 같다. 구멍 바로 아래에 있는 바닥 위의 점을 O, 입자와 O 사이의 거리를 x, 구멍과 입자 사이에 있는 줄의 길이를 L이라 하자.



속력

피타고라스(Pythagoras) 정리와 삼각형으로부터

$$L^2 = x^2 + h^2, \qquad x = h\tan\theta, \qquad \sin\theta = \frac{x}{L}.$$

줄은 속력 V로 구멍을 통해 끌려 들어가므로 $\dot{L} = -V$이다. $L^2 = x^2 + h^2$을 시간에 대하여 미분하면(h는 상수이다)

$$2L\dot{L} = 2x\dot{x} \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = \frac{L}{x}\dot{L} = -\frac{VL}{x} = -\frac{V}{\sin\theta}.$$

따라서 입자는 다음 속력으로 O를 향해 움직인다.

$$\boxed{v = \frac{V}{\sin\theta} = V\operatorname{cosec}\theta}$$

이 값은 항상 V보다 크다(V로 움직이는 것은 입자가 아니라 줄이다).

> **생각해 보기** 입자의 속력이 왜 그냥 V나 $V\sin\theta$가 아닐까?

줄이 끌려 들어가는 속력과 같아야 하는 것은 입자 속도 중 **줄 방향** 성분뿐이다. 줄이 바닥과 이루는 각이 $\frac{\pi}{2} - \theta$이므로 그 성분은 $v\sin\theta$이다. $v\sin\theta = V$로 놓으면 위와 같은 답을 얻으며, 왜 $v > V$인지도 분명해진다.

가속도

몫의 미분법(quotient rule)과 $\dot{L} = -V$, $\dot{x} = -VL/x$를 이용하여 $\dot{x} = -VL/x$를 한 번 더 미분한다.

$$\ddot{x} = -V\,\frac{\dot{L}\,x - L\,\dot{x}}{x^2} = -V\,\frac{-Vx + VL^2/x}{x^2} = -\frac{V^2(L^2 - x^2)}{x^3} = -\frac{V^2h^2}{x^3}.$$

$x = h\tan\theta$를 대입하면 $\ddot{x} = -\dfrac{V^2}{h\tan^3\theta}$이다. $\dot{x}$와 $\ddot{x}$가 모두 음수이므로 입자는 빨라지고 있다. 그 가속도의 크기는

$$\boxed{a = \frac{V^2}{h\tan^3\theta} = \frac{V^2\cos^3\theta}{h\sin^3\theta}}$$

이고, 방향은 O를 향한다. (검산으로, θ가 감소하면 $v = V/\sin\theta$는 실제로 증가한다.)

장력과 바닥에서 떨어지는 순간

입자에 작용하는 힘은 무게 mg, 바닥으로부터의 수직항력 R(바닥이 매끄러우므로 연직 방향), 줄 방향의 장력 T이다. 장력의 수평 성분은 O를 향하는 $T\sin\theta$, 연직 성분은 위쪽을 향하는 $T\cos\theta$이다.

수평 방향으로 뉴턴의 제2법칙을 적용하면

$$T\sin\theta = ma = \frac{mV^2}{h\tan^3\theta} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{T = \frac{mV^2}{h\sin\theta\tan^3\theta} = \frac{mV^2\cos^3\theta}{h\sin^4\theta}}$$

연직 방향으로는 입자가 바닥 위에 있는 동안 평형 상태이므로

$$R + T\cos\theta = mg \quad\Longrightarrow\quad R = mg - \frac{mV^2\cos\theta}{h\sin\theta\tan^3\theta} = mg - \frac{mV^2}{h\tan^4\theta}.$$

생각해 보기 입자가 끌려 들어올 때 R은 어느 쪽으로 변할까?

입자가 O에 가까워지면 θ가 감소하므로 $\tan^4\theta$가 감소하고, R은 꾸준히 감소한다. 처음에는(θ가 클 때) R이 mg에 가깝다. 입자는 $R \geq 0$인 동안 바닥 위에 머무르고, 처음으로 $R = 0$이 되는 순간 바닥에서 떨어진다. 그 순간은

$$\frac{mV^2}{h\tan^4\theta} = mg \quad\Longleftrightarrow\quad \tan^4\theta = \frac{V^2}{gh},$$

일 때이며, 이것이 보이려던 것이다. θ가 이보다 작으면 식이 $R < 0$을 주는데 이는 불가능하므로, 입자는 실제로 바닥에서 떨어진 것이다.

검산

- 차원(dimension): V^2/h는 가속도, mV^2/h는 힘이며, $V^2/(gh)$는 $\tan^4\theta$가 그래야 하듯이 무차원이다.
- 극한: $\theta \to \frac{\pi}{2}$일 때(입자가 매우 멀리 있을 때) 줄은 거의 수평이고, 예상대로 $v \to V$, $a \to 0$이다. $\theta \to 0$일 때는 속력과 장력이 한없이 커지므로, 입자는 O에 도달하기 전에 바닥에서 떨어져야 한다.
- 수치: $V = 2$, $h = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$이면 $v = 2\sqrt{2} \approx 2.83$, $a = 4$이다. $x(t) = \sqrt{(L_0 - Vt)^2 - h^2}$를 수치적으로 미분해도 같은 값을 얻는다. $g = 9.8$이면 입자는 $\theta \approx 38.6°$일 때 바닥에서 떨어진다.

흔한 실수

- 입자의 속력을 $V/\sin\theta$가 아니라 V나 $V\sin\theta$로 놓는 것.
- $\dot{x} = -VL/x$를 두 번째로 미분할 때 L이 변한다는 사실을 잊는 것.
- 줄이 일정한 속력으로 움직이므로 장력이 일정하다고 가정하는 것. 입자는 가속하므로 장력은 일정하지 않다.

STEP 너머

이 문제의 입자는 자유도(degree of freedom)가 하나뿐이다. 줄의 운동이 정해지면 매 순간 입자의 위치가 결정된다. 이런 구속 조건이 있는 문제는 대학 과정 1, 2학년에 배우는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서 체계적으로 다룬다. 라그랑주 역학에서는 구속 조건을 좌표 선택에 반영하고, R과 T 같은 구속력은 나중에 구한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에 이런 종류의 문제가 많이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.