풀이

STEP II 2015, 문제 1

순수수학 • 부등식과 급수

STEP II 2015, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s2-q1

핵심 아이디어

함수와 로그(logarithm) 사이의 각 부등식에 적절히 고른 x의 값을 대입하면, 급수(series)의 한 항과 로그의 차 사이의 부등식이 된다. 이 차들을 모두 더하면 거의 모든 항이 소거되고(이런 합을 망원합(telescoping sum)이라 한다), 로그 한두 개만 남는다. 요령은 로그가 차의 꼴로 쪼개지도록 대입할 값을 고르는 데 있다.

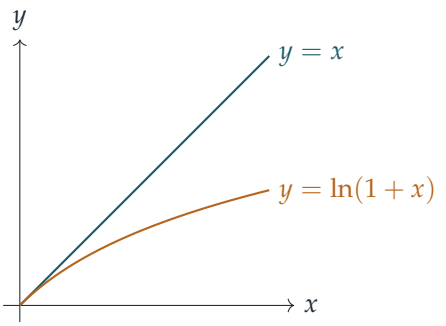
풀이

소문항 (i)

$x \geq 0$에 대하여 $f(x) = x - \ln(1+x)$라 하자. 그러면 $f(0) = 0 - \ln 1 = 0$이고

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0 \qquad \text{단, } x > 0.$$

따라서 f는 $[0, \infty)$에서 순증가(strictly increasing)하고, 모든 $x > 0$에 대하여 $f(x) > f(0) = 0$이다. 즉 모든 양수 x에 대하여 $x > \ln(1+x)$이므로, 증명하려던 결과를 얻는다.



이제 양의 정수 k에 대하여 $x = \frac{1}{k}$로 놓으면

$$\frac{1}{k} > \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k.$$

이 부등식들을 $k = 1, 2, \ldots, n$에 대하여 더하면, 우변이 연쇄적으로 소거된다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &> (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n) \\ &= \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1).\end{aligned}$$

이것이 증명하려던 결과이다. (부수적으로, $\ln(n+1) \to \infty$이므로 조화급수(harmonic series)는 발산한다.)

소문항 (ii)

$0 \le x < 1$에 대하여 $g(x) = x + \ln(1-x)$라 하자. 그러면 $g(0) = 0$이고

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} < 0 \qquad \text{단, } 0 < x < 1,$$

이다. 이 범위에서 $1 - x > 0$이기 때문이다. 따라서 g는 순감소하고 $0 < x < 1$에서 $g(x) < 0$이다. 즉

$$x < -\ln(1-x) \qquad (0 < x < 1).$$

? **생각해 보기** x에 어떤 값을 대입해야 할까? 그리고 왜 $k = 1$은 쓸 수 없을까?

좌변에 $\frac{1}{k^2}$이 나오기를 원하므로 $x = \frac{1}{k^2}$으로 놓는다. 그러려면 $x < 1$이어야 하므로 $k \ge 2$이다. $k = 1$이면 로그 $\ln(1-1)$이 정의되지 않는다. 그래서 항 $\frac{1}{1} = 1$은 따로 떼어 두는데, 이것이 바로 상계 $1 + \ln 2$의 1이다. $k \ge 2$일 때 핵심은 $1 - \frac{1}{k^2}$이 다음과 같이 인수분해된다는 점이다.

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2},$$

따라서

$$\frac{1}{k^2} < -\ln\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = (\ln k - \ln(k-1)) - (\ln(k+1) - \ln k).$$

$a_k = \ln k - \ln(k-1)$이라 하면 우변은 $a_k - a_{k+1}$이다. $k = 2$부터 N까지 더하면 연쇄적으로 소거되어

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2} < a_2 - a_{N+1} = \ln 2 - \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) < \ln 2,$$

을 얻는다. $\ln\frac{N+1}{N} > 0$이기 때문이다.

따라서 부분합(partial sum) $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}$은 N에 대하여 증가하고, 모두 $1+\ln 2$보다 작다. 위로 유계(bounded above)인 증가수열은 수렴(converge)하므로, 이 무한급수는 수렴하고 그 합은 $1+\ln 2$ 이하이다.

부등식을 엄격하게 만들려면, 극한을 취하면 $\leq$만 보존된다는 점에 유의하여 약간의 여유를 남겨 두어야 한다. $k=2$일 때의 부등식 $\frac{1}{4} < \ln\frac{4}{3}$은 엄격하다. $\delta = \ln\frac{4}{3} - \frac{1}{4} > 0$이라 하자. 그러면 모든 $N \geq 2$에 대하여 같은 방식으로 소거하면

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2} < \ln 2 - \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) - \delta < \ln 2 - \delta,$$

이므로, 극한을 취하면 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \ln 2 - \delta < \ln 2$이다. 여기에 $k=1$인 항을 더하면

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 1 + \ln 2,$$

이고, 이것이 증명하려던 결과이다.

검산

- 소문항 (i)에서 $n=1$이면 $1 > \ln 2 \approx 0.693$이다. $n=10$이면 $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} \approx 2.929$이고, $\ln 11 \approx 2.398$이다.
- 소문항 (ii): 실제 합은 $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449$로, $1+\ln 2 \approx 1.6931$보다 넉넉히 작다. 사실 위의 풀이는 이보다 조금 더 정밀한 상계 $1+\ln 2 - \delta \approx 1.6555$를 주며, 이때 $\delta \approx 0.0377$이다.
- $\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2}$에 대한 소거 후의 상계 $\ln 2 - \ln\frac{N+1}{N}$은 10^5 이하의 모든 N에 대하여 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- $k=1$일 때에도 $x=\frac{1}{k^2}$을 대입하는 것: 이때 $\ln(1-x)$는 정의되지 않으며, 첫째 항을 따로 떼어 두지 않으면 $1+\ln 2$의 1을 잃게 된다.
- $f(0)=0$은 보이지 않고 $f'(x)>0$만 보이는 것: 증가하는 함수라도 음수일 수 있다.
- 엄격한 부등식에서 극한을 취한 뒤, 아무 설명 없이 극한에서도 엄격한 부등식이 성립한다고 주장하는 것: 극한은 $\leq$만 보장한다.

STEP 너머

합을 로그(또는 적분)와 비교하는 것은 적분 판정법(integral test)의 출발점이며, 소문항 (i)을 정교하게 다듬으면 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$이 오일러(Euler) 상수 $\gamma \approx 0.5772$로 수렴함을 보

일 수 있다. 정확한 값 $\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$은 오일러가 바젤 문제(Basel problem)를 푼 결과로, 대학 1학년 과정에서는 흔히 푸리에 급수(Fourier series)를 이용해 유도한다. 여기서 사용한 단조 수렴(monotone convergence) 논법, 즉 유계인 증가수열은 수렴한다는 사실은 실해석학(real analysis)의 초석이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 이를 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.