풀이

STEP I 2015, 문제 9

역학 • 포물체 운동

> **STEP I 2015, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q9

핵심 아이디어

"가장 늦게 땅에 떨어진다"는 것은 발사 시각이 아니라 **착지 시각**에 관한 말이다. 나중에 더 낮은 각도로 발사된 총알은 공중에 머무는 시간이 짧으므로, 먼저 발사된 총알보다 먼저 떨어질 수 있다. 착지 시각을 발사 시각과 비행 시간(time of flight)의 합으로 나타내고, 이를 발사 구간 전체에서 최대화한다. 변수로 t 대신 각 α를 쓰면 미분 계산이 깔끔해지고, k에 대한 조건에 따라 최댓값이 정류점(stationary point)에서 생기는지 구간의 끝점에서 생기는지가 결정된다.

풀이

식 세우기

각 총알을 공기 저항 없이 중력만 받으며 자유롭게 운동하는 입자로 보고, 지면 높이에서 발사된다고 하자. 앙각(elevation) α로 발사된 총알의 발사 후 시각 s에서의 연직 위치는 $y = u\sin\alpha\, s - \frac{1}{2}gs^2$이므로, 이 총알은

$$\frac{2u\sin\alpha}{g},$$

후에 지면으로 돌아오고, 그동안 수평으로

$$R(\alpha) = u\cos\alpha \cdot \frac{2u\sin\alpha}{g} = \frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

만큼 이동한다. 앙각이 α인 총알은 시각 $t = (\frac{1}{3}\pi - \alpha)/\lambda$에 발사되며, t가 $[0, \frac{\pi}{6\lambda}]$ 전체를 움직일 때 α는 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi]$ 전체를 각 값마다 한 번씩 지난다. 따라서 이 총알의 착지 시각은

$$L(\alpha) = \frac{\frac{1}{3}\pi - \alpha}{\lambda} + \frac{2u\sin\alpha}{g}, \qquad \frac{1}{6}\pi \le \alpha \le \frac{1}{3}\pi.$$

이다. 가장 늦게 떨어지는 총알은 L을 최대로 만드는 총알이다. $k = \dfrac{g}{2\lambda u}$이므로 $\dfrac{2u}{g} = \dfrac{1}{\lambda k}$이고,

$$L(\alpha) = \frac{1}{\lambda}\left(\tfrac{1}{3}\pi - \alpha + \frac{\sin\alpha}{k}\right), \qquad L'(\alpha) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\cos\alpha}{k} - 1\right) = \frac{\cos\alpha - k}{\lambda k}.$$

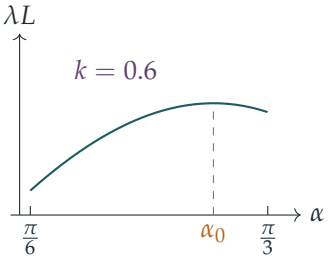
이다. 따라서 L은 $\cos\alpha > k$인 곳에서 증가하고 $\cos\alpha < k$인 곳에서 감소한다. 주어진 구간에서 $\cos\alpha$는 ($\alpha = \frac{1}{6}\pi$에서의) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$부터 ($\alpha = \frac{1}{3}\pi$에서의) $\frac{1}{2}$까지 감소한다.

> **생각해 보기** 왜 α가 클수록 발사 시각이 더 이르며, 이것이 L'의 부호에 왜 중요한가?

총신이 내려가고 있으므로 가파른 각도의 총알이 먼저 발사된다. α를 조금 키우면 발사 시각은 라디안당 $1/\lambda$만큼 앞당겨지지만, 비행 시간은 라디안당 $\frac{2u}{g}\cos\alpha$만큼 늘어난다. $L'(\alpha)$는 이 두 효과의 차이이고, 그 부호가 어느 쪽이 이기는지 알려 준다.

$\frac{1}{2} \le k \le \frac{1}{2}\sqrt{3}$인 경우

이때 k는 $\cos\alpha$의 치역 안에 있으므로, $\cos\alpha_0 = k$를 만족하는 $\alpha_0 \in [\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi]$가 정확히 하나 존재한다. 이 구간에서 cos는 감소함수이므로 $\alpha < \alpha_0$이면 $\cos\alpha > k$이고 $\alpha > \alpha_0$이면 $\cos\alpha < k$이다. 따라서 L은 α_0까지 증가하다가 그 뒤로 감소하며, 앙각 α_0로 발사된 총알이 가장 늦게 떨어진다. ($k = \frac{1}{2}$ 또는 $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$이면 α_0은 끝점이고 L은 단조(monotonic)이지만, 결론은 같다.)



(착지 시각의 변화가 잘 보이도록 세로축을 평행이동하였다.)

$\sin\alpha_0 = \sqrt{1-k^2}$($\alpha_0$이 예각이므로 양수)를 이용하면, 이 총알의 수평 도달 거리(range)는

$$R(\alpha_0) = \frac{2u^2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0}{g} = \frac{2ku^2\sqrt{1-k^2}}{g},$$

이고, 이것이 구하는 거리이다.

$k < \frac{1}{2}$인 경우

이때 구간 안의 모든 α에 대해 $\cos\alpha \ge \frac{1}{2} > k$이므로, 구간 전체에서 $L'(\alpha) > 0$이고 L은 순증가한다. 최댓값은 $\alpha = \frac{1}{3}\pi$에서 생긴다. 즉 **가장 먼저** 발사된 총알이 가장 늦게 떨어진다.

이 총알의 수평 도달 거리는

$$R\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = \frac{2u^2}{g} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}.$$

이다. 따라서 $k < \frac{1}{2}$이면 마지막 총알은 총에서 $\dfrac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}$만큼 떨어진 곳에 착지한다.

(덧붙이면, $k > \frac{1}{2}\sqrt{3}$인 경우 L은 감소하므로 마지막으로 발사된 총알이 가장 늦게 떨어지고, $\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3}$이므로 거리는 역시 $\frac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}$이다.)

검산

- 연속성: $k = \frac{1}{2}$일 때 첫 번째 공식은 $\dfrac{2 \cdot \frac{1}{2}u^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{g} = \dfrac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}$를 주어 $k < \frac{1}{2}$일 때의 답과 일치한다. $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$일 때도 같은 값을 준다.
- $u^2/g = 1$, $k = 0.6$으로 두면 마지막 총알은 $\cos\alpha_0 = 0.6$이고 거리 $2(0.6)(0.8) = 0.96$인 곳에 착지한다. 발사 시각 2만 개를 표본으로 잡고 그 총알의 운동을 수치적으로 단계별 계산한 컴퓨터 검산 결과도 이와 일치하였다.
- 단위: k는 무차원(dimensionless)량이고(g를 속력 나누기 시간의 단위를 갖는 λu로 나눈 것), u^2/g는 길이이다.

흔한 실수

- 착지 시각 $t + \frac{2u\sin\alpha}{g}$ 대신 수평 도달 거리나 비행 시간만을 최대화하는 것.
- 마지막으로 발사된 총알이 가장 늦게 떨어진다고 가정하는 것.
- α가 커질 때 t가 작아진다는 사실을 잊어 L'의 부호를 잘못 구하는 것.

STEP 너머

닫힌 구간에서 함수를 최대화하려면 구간 내부의 정류점과 끝점을 비교해야 하며, 여기서는 매개변수가 어느 쪽이 이길지를 결정한다. 이처럼 "어떤 제약 조건이 활성화되는가"가 바뀌는 현상은 제약 최적화(constrained optimisation)의 출발점이며, 대학 1학년 응용수학 방법론 과목에서 만나게 된다. 이런 흐름의 역학을 더 접하고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.