풀이

STEP I 2015, 문제 8

순수수학 • 거듭제곱 합의 나누어떨어짐

> **STEP I 2015, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q8

핵심 아이디어

합을 한 번은 앞에서부터, 한 번은 뒤에서부터 두 번 쓴 다음 더한다. 이것이 소문항 (i)에 쓰는 가우스(Gauss)의 기법이며, 소문항 (ii)는 항이 k제곱(단, k는 홀수)일 때 바로 이 기법을 쓰도록 만들어져 있다. r^k와 $(n-r)^k$를 짝지으면 $2S$가 n의 배수임을 알 수 있고, r^k와 $(n+1-r)^k$를 짝지으면 $2S$가 $n+1$의 배수이기도 함을 알 수 있다. n과 $n+1$은 공약수가 없으므로, 두 사실을 결합하면 $\frac{1}{2}n(n+1)$로 나누어떨어짐(divisibility)을 얻는다.

풀이

소문항 (i)

$T = 1+2+\cdots+n$이라 하자. 합을 역순으로 쓰면 다음과 같다.

$$T = 1+2+\cdots+(n-1)+n,$$
$$T = n+(n-1)+\cdots+2+1.$$

열끼리 더하면 n개의 열 각각의 합이 $n+1$이므로 $2T = n(n+1)$이고, 따라서 다음을 얻는다.

$$1+2+\cdots+n = \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

소문항 (ii)

법(modulo) N으로 계산하면 $N-m \equiv -m$이므로 다음이 성립한다.

$$(N-m)^k + m^k \equiv (-m)^k + m^k = -m^k + m^k = 0 \pmod{N},$$

여기서 k가 홀수이므로 $(-m)^k = -m^k$이다. 따라서 N은 $(N-m)^k + m^k$를 나눈다.

합동식(congruence)을 피하고 싶다면 다음과 같이 할 수도 있다. 홀수 k에 대하여 다음 인수분해(factorisation)가 성립한다.

$$a^k + b^k = (a+b)(a^{k-1} - a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 - \cdots + b^{k-1}),$$

(부호가 번갈아 바뀌고 괄호 안에 k개의 항이 있으므로 마지막 부호는 $+$이다.) $a = N - m$, $b = m$으로 놓으면 결과는 $a + b = N$에 어떤 정수를 곱한 것이 된다. 여기서는 $m \leq N$일 필요가 전혀 없다. $m > N$이면 $N - m$은 음수이지만 여전히 정수이다.

n 또는 $\frac{1}{2}n$으로 나누어떨어짐

k가 홀수일 때 $S = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$라 하자. 소문항 (i)의 기법을 그대로 따라 한다. $0^k = 0$이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$S = \sum_{r=0}^{n} r^k = \sum_{r=0}^{n} (n-r)^k,$$

여기서 두 번째 꼴은 같은 합을 역순으로 쓴 것이다. 두 식을 더하면 다음을 얻는다.

$$2S = \sum_{r=0}^{n} \Big[(n-r)^k + r^k \Big].$$

$N = n$, $m = r$로 놓고 소문항 (ii)를 적용하면 각 괄호는 n으로 나누어떨어지므로 n은 $2S$를 나눈다. M을 정수로 하여 $2S = nM$이라 하자.

- n이 홀수이면, n은 $2S$를 나누고 2와 공약수가 없으므로 n은 S를 나눈다.
- n이 짝수이면, $\frac{1}{2}n$이 정수이고 $S = \frac{1}{2}n \cdot M$이므로 $\frac{1}{2}n$은 S를 나눈다.

> ? **생각해 보기** n이 짝수일 때 왜 그냥 "n은 S를 나눈다"라고 말할 수 없을까?

"$n \mid 2S$"에서 "$n \mid S$"로 넘어가려면 n이 2와 서로소(coprime)여야 하기 때문이다. 실제로 이는 성립하지 않을 수 있다. $n = 2$, $k = 1$이면 $S = 3$인데, 이는 2의 배수가 아니다. 짝수 n에 대해 말할 수 있는 것은 n의 절반이 S를 나눈다는 것뿐이다.

$1 + 2 + \cdots + n$으로 나누어떨어짐

소문항 (i)에 의해 $\frac{1}{2}n(n+1) \mid S$임을 보이면 된다. 이번에는 항을 다르게 짝짓는다. $1, 2, \ldots, n$을 역순으로 놓으면 r은 $n + 1 - r$로 가므로

$$2S = \sum_{r=1}^{n} \Big[(n+1-r)^k + r^k \Big],$$

이고, $N = n + 1$, $m = r$로 놓고 소문항 (ii)를 적용하면 각 괄호는 $n + 1$로 나누어떨어진다. 따라서 $n + 1$은 $2S$를 나눈다.

이제 n과 $n+1$은 연속한 정수이므로 1 이외의 공약수가 없다. 그러면 n의 임의의 약수와 $n+1$의 임의의 약수에 대해서도 마찬가지이다. 서로소인 두 정수가 각각 S를 나누면 그 곱도 S를 나눈다는 사실을 이용한다.

- **n이 홀수인 경우.** $n \mid S$임은 이미 보였다. 또 $n+1$은 짝수이고 $n+1 \mid 2S$이므로, $2S = (n+1)L$로 쓰면 $S = \frac{1}{2}(n+1)L$, 즉 $\frac{1}{2}(n+1) \mid S$이다. n과 $\frac{1}{2}(n+1)$은 서로소이므로 그 곱 $\frac{1}{2}n(n+1)$은 S를 나눈다.
- **n이 짝수인 경우.** $\frac{1}{2}n \mid S$임은 이미 보였다. 또 $n+1$은 홀수이고 $2S$를 나누므로, (2와 서로소이므로) S를 나눈다. $\frac{1}{2}n$과 $n+1$은 서로소이므로 그 곱 $\frac{1}{2}n(n+1)$은 S를 나눈다.

두 경우 모두 S는 $\frac{1}{2}n(n+1) = 1+2+\cdots+n$으로 나누어떨어지며, 이것이 증명하려던 것이다.

> **생각해 보기** 나누어떨어짐에 관한 두 사실을 약수끼리 곱하여 하나로 합치는 것이 왜 정당할까?

$\gcd(a,b) = 1$이고 $a \mid S$, $b \mid S$라 하자. $S = aq$로 쓰자. 그러면 $b \mid aq$이고 b는 a와 공통인 소인수가 없으므로, b를 나누는 모든 소수의 거듭제곱은 q를 나누어야 한다. 따라서 $b \mid q$이고 $ab \mid S$이다. 서로소가 아니면 이는 성립하지 않는다. $4 \mid 12$이고 $6 \mid 12$이지만 $24 \nmid 12$이다. 그래서 n이 짝수일 때 예컨대 n과 $n+1$을 짝짓지 않고, n과 $\frac{1}{2}(n+1)$, 또는 $\frac{1}{2}n$과 $n+1$을 조심스럽게 짝지은 것이다.

검산

$k=3, n=4$인 경우를 확인해 보자. $S = 1+8+27+64 = 100$이고, $1+2+3+4 = 10$은 100을 나눈다. 실제로 $1^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$이므로 $k=3$이면 결과가 바로 나온다. $k=5, n=5$이면 $S = 1+32+243+1024+3125 = 4425 = 15\times 295$이다. 최종 결과는 모든 $n \le 119$와 모든 홀수 $k \le 15$에 대하여 컴퓨터로도 확인하였다. k가 짝수이면 주장은 성립하지 않는다. $1^2+2^2 = 5$는 3으로 나누어떨어지지 않으며, 이는 k가 홀수라는 조건이 실제로 쓰인다는 것을 보여 준다.

흔한 실수

- n이 짝수일 때 $n \mid 2S$에서 $n \mid S$라고 결론짓는 것.
- 서로소가 아닌 약수를 곱하는 것. 예를 들어 $n(n+1) \mid 2S$라고 주장한 다음 주의 없이 반으로 나누는 것.
- r^k와 $(n-r)^k$를 짝지을 때 $r=0$인 항(또는 $r=n$인 항)을 빠뜨리는 것. $0^k = 0$을 포함하

면 모든 항이 깔끔하게 짝지어진다.

STEP 너머

거듭제곱의 합(power sum) $1^k + \cdots + n^k$는 n에 대한 $k+1$차 다항식(polynomial)이며, 베르누이 수(Bernoulli numbers)를 이용한 파울하버(Faulhaber)의 공식으로 주어진다. k가 홀수이면 이 합을 $\frac{1}{2}n(n+1)$에 대한 다항식으로 쓸 수도 있는데, 이는 이 결과를 다른 각도에서 설명해 준다. 여기서의 논증은 초등 정수론(elementary number theory)의 기본인 합동식과 서로소 다루기를 처음 맛보는 것이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*은 훌륭한 입문서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.