풀이

STEP I 2015, 문제 7

순수수학 • 구간에서의 최댓값

> **STEP I 2015, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q7

핵심 아이디어

닫힌구간(closed interval)에서 매끄러운 함수(smooth function)의 최댓값은 구간 내부의 정류점(stationary point)이나 끝점(endpoint) 중 한 곳에서 나타난다. 이 문제에서 정류점은 $x = 0$과 $x = \frac{a}{3}$이고, 두 번째 정류점은 a가 커짐에 따라 오른쪽으로 움직이다가 결국 구간을 벗어난다. 따라서 후보들을 나열한 뒤 a가 변할 때 이들을 비교한다. 세 개의 범위는 비교 결과가 바뀌는 지점과 $\frac{a}{3}$이 $x = 1$을 지나는 지점에서 생긴다.

풀이

후보들

미분하면

$$f'(x) = 6ax - 18x^2 = 6x(a - 3x),$$

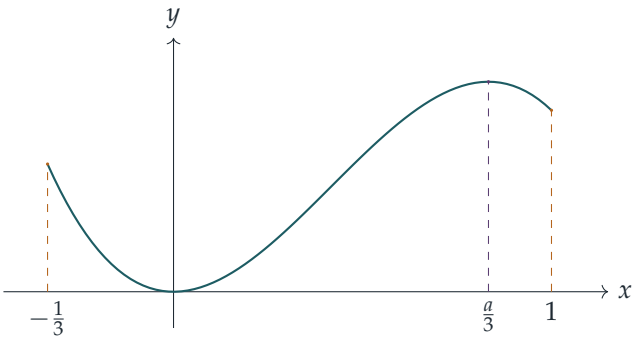
이므로 정류점은 $x = 0$과 $x = \frac{a}{3}$이다. $a \geq 0$일 때 f'의 부호로부터 그래프의 모양을 알 수 있다.

- $x < 0$이면 $6x < 0$이고 $a - 3x > 0$이므로 $f'(x) < 0$이고, f는 감소한다.
- $0 < x < \frac{a}{3}$이면 $f'(x) > 0$이고, f는 증가한다.
- $x > \frac{a}{3}$이면 $f'(x) < 0$이고, f는 감소한다.

따라서 $x = 0$은 극소(local minimum)이고 $x = \frac{a}{3}$은 극대(local maximum)이다($a = 0$이면 두 점이 일치하고 $f = -6x^3$은 전체에서 감소한다). 필요한 값은 다음과 같다.

$$f\left(-\tfrac{1}{3}\right) = \frac{a}{3} + \frac{2}{9}, \qquad f\left(\tfrac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{3} - \frac{2a^3}{9} = \frac{a^3}{9}, \qquad f(1) = 3a - 6.$$

f는 $[-\frac{1}{3}, 0]$에서 감소하므로 이 부분에서의 최댓값은 $f(-\frac{1}{3})$이다. 값 $f(0) = 0$은 결코 최댓값이 되지 않는다. 따라서 $\mathrm{M}(a)$는 $f(-\frac{1}{3})$과 $[0, 1]$에서의 f의 최댓값 중 큰 쪽이다.



그림은 $a = \frac{5}{2}$인 경우이다. 세 후보는 두 끝점(호박색)과 극대점(자주색)이며, 이 경우에는 극대점이 가장 크다.

$0 \le a \le 3$인 경우

이때 $\frac{a}{3} \in [0, 1]$이므로 $[0, 1]$에서 함수는 $x = \frac{a}{3}$까지 증가한 뒤 감소한다. 이 구간에서의 최댓값은 $f(\frac{a}{3}) = \frac{a^3}{9}$이고, 이를 $f(-\frac{1}{3})$과 비교해야 한다.

$$\frac{a^3}{9} - \left(\frac{a}{3} + \frac{2}{9}\right) = \frac{a^3 - 3a - 2}{9} = \frac{(a+1)^2(a-2)}{9}.$$

? **생각해 보기** $a^3 - 3a - 2$의 인수분해(factorisation)는 어떻게 알아낼 수 있을까?

작은 정수를 대입해 본다. $a = -1$이면 $-1 + 3 - 2 = 0$이고, $a = 2$이면 $8 - 6 - 2 = 0$이다. 세 근의 합은 0이므로(a^2 항이 없다) 세 번째 근은 다시 -1이고, 따라서 $(a+1)^2(a-2)$를 얻는다.

$a \ge 0$에서 $(a+1)^2 > 0$이므로 차의 부호는 $a - 2$의 부호와 같다. 그러므로

$$\mathrm{M}(a) = \frac{a}{3} + \frac{2}{9} \quad \text{단, } 0 \le a \le 2, \qquad \mathrm{M}(a) = \frac{a^3}{9} \quad \text{단, } 2 \le a \le 3,$$

이고, $a = 2$에서 두 식은 모두 $\frac{8}{9}$를 준다.

$a > 3$인 경우

이때 $\frac{a}{3} > 1$이므로 f는 $[0, 1]$ 전체에서 증가하고, 이 구간에서의 최댓값은 $f(1) = 3a - 6$이다. 왼쪽 끝점과 비교하면

$$(3a - 6) - \left(\frac{a}{3} + \frac{2}{9}\right) = \frac{8a}{3} - \frac{56}{9} = \frac{8}{9}(3a - 7),$$

이고, $a > 3 > \frac{7}{3}$이므로 이 값은 양수이다. 따라서 $a \geq 3$에서 $\mathrm{M}(a) = 3a - 6$이다. $a = 3$에서 이 값은 $3 = \frac{27}{9}$으로, 가운데 식과 일치한다.

결론

$$\mathrm{M}(a) = \begin{cases} \dfrac{a}{3} + \dfrac{2}{9}, & 0 \leq a \leq 2, \\ \dfrac{a^3}{9}, & 2 \leq a \leq 3, \\ 3a - 6, & a \geq 3. \end{cases}$$

말로 하면, a가 작을 때는 왼쪽 끝점이 가장 크고, a가 중간 크기일 때는 극대점이 가장 크며, 극대점이 구간을 벗어나고 나면 오른쪽 끝점이 가장 크다.

검산

- M은 연속(continuous)이다. $a = 2$에서 양쪽 모두 $\frac{8}{9}$이고, $a = 3$에서 양쪽 모두 3이다. 최댓값은 a에 따라 연속적으로 변하므로 당연히 그래야 한다.
- $a = 0$: $f(x) = -6x^3$은 감소하므로 최댓값은 $f(-\frac{1}{3}) = \frac{2}{9}$이고, 이는 첫 번째 식과 일치한다.
- $a = \frac{5}{2}$: 식은 $\frac{125}{72} \approx 1.736$을 주고, 끝점에서의 값은 $f(-\frac{1}{3}) \approx 1.056$과 $f(1) = 1.5$로 둘 다 더 작다. 0과 12 사이의 수백 개의 a 값에 대해 x의 촘촘한 격자에서 컴퓨터로 탐색한 결과, 10^{-8} 이내의 오차로 식과 일치하였다.

흔한 실수

- 왼쪽 끝점 $x = -\frac{1}{3}$을 빠뜨리는 것. f는 $x < 0$에서 감소하므로 이 끝점에서의 값이 극댓값보다 클 수 있으며, 실제로 $a < 2$일 때 그렇다.
- $a > 3$일 때 $f(\frac{a}{3})$을 사용하는 것. 이때 $\frac{a}{3}$은 구간 밖에 있으므로 후보가 될 수 없다.
- 극댓값이 자동으로 구간에서의 최댓값이라고 가정하는 것.

STEP 너머

여기서 $\mathrm{M}(a) = \max_{x \in [-1/3, 1]} f(x)$는 함수족에 대한 최적화로 정의된 함수이며, 이러한 함수는 대개 연속이지만 구간별로만 매끄럽다(piecewise smooth). $a = 2$에서 M의 좌미분계수와 우미분계수(left and right derivatives)가 서로 다르다는 것을 확인해 볼 수 있다. 닫힌

유계 구간에서 연속인 함수가 애초에 최댓값을 가진다는 사실은 최대최소 정리(Extreme Value Theorem)이며, 해석학(analysis) 입문 과정에서 증명한다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.