풀이

STEP I 2015, 문제 6

순수수학 • 기하에서의 벡터

STEP I 2015, 6번 문제

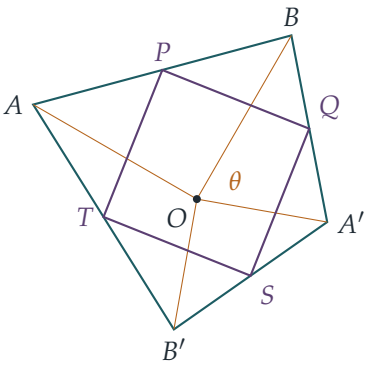
더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s1-q6

핵심 아이디어

O를 원점으로 두면, 조건 $OA = OB$와 $\angle AOB = 90°$는 B가 A를 O를 중심으로 직각만큼 돌린 점이라는 뜻이고, 마찬가지로 B'은 A'을 같은 방향으로 돌린 점이다. 이 4분의 1 회전(quarter-turn)을 R로 쓰자. 그러면 중점 사각형의 각 변은 바로 앞 변에 R를 적용한 것이 되고, 바로 이 성질이 정사각형을 만든다. 변을 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{a}'$으로 나타내고 나면, 넓이는 코사인 법칙(cosine rule)으로 계산하면 된다.

풀이



중점들은 정사각형을 이룬다

O를 원점으로 잡고, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}', \mathbf{b}'$을 각각 A, B, A', B'의 위치벡터(position vector)라 하자. R를 O를 중심으로 시계 방향으로 90°만큼 돌리는 회전(rotation)이라 하자. 이 회전은 선

형(linear)이고, 길이를 보존하며, 영벡터가 아닌 모든 벡터를 직각만큼 돌린다.

꼭짓점이 시계 방향으로 돌아가며 놓여 있고 O가 사각형 내부에 있으므로, OA에서 OB로 가는 것은 시계 방향으로 90° 도는 것이다. $OA = OB$이므로 이로부터 $\mathbf{b} = R\mathbf{a}$를 얻는다. 같은 방법으로 $\mathbf{b}' = R\mathbf{a}'$이다.

P, Q, S, T를 각각 AB, BA', $A'B'$, $B'A$의 중점이라 하자.

$$\mathbf{p} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}), \quad \mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{a}'), \quad \mathbf{s} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}'+\mathbf{b}'), \quad \mathbf{t} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}'+\mathbf{a}).$$

이제 네 변을 차례로 살펴보자. $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$라 하면

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}'-\mathbf{a}) = \mathbf{u},\\
\overrightarrow{QS} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}'-\mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}R(\mathbf{a}'-\mathbf{a}) = R\mathbf{u},\\
\overrightarrow{ST} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{a}') = -\mathbf{u},\\
\overrightarrow{TP} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{b}') = -R\mathbf{u}.
\end{aligned}$$

여기서 $A \neq A'$이므로 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$이다. 따라서 PQ와 ST는 크기가 같고 방향이 반대이므로, $PQST$는 평행사변형(parallelogram)이다. 이웃한 변 QS는 $\mathbf{u}$를 길이 변화 없이 직각만큼 돌린 것이다. 이웃한 두 변의 길이가 같고 서로 수직인 평행사변형은 정사각형이므로, 구하는 대로 $PQST$는 정사각형이다.

> **생각해 보기** A를 B로 보내는 4분의 1 회전이 왜 A'을 B'으로 보내는 회전과 같아야 할까?

두 쌍 모두 시계 방향으로 붙인 이름에서 연달아 나오고 O가 내부에 있으므로, 각 경우 첫 번째 반직선에서 두 번째 반직선으로 도는 방향은 시계 방향이다. 만약 한쪽 회전은 시계 방향이고 다른 쪽은 반시계 방향이라면, $\overrightarrow{QS}$에서 $R\mathbf{u}$로 넘어가는 단계가 성립하지 않으며, 일반적으로 도형은 정사각형이 되지 않는다.

넓이의 최대화

$OA = OB = p$, $OA' = OB' = q$라 하고 둘 다 고정하며, $\theta = \angle BOA'$이라 하자. O에서의 네 각의 합은 360°이고 그중 두 각이 직각이므로, $\angle B'OA = 180^\circ - \theta$이다. O가 내부에 있으므로 θ와 $180^\circ - \theta$는 모두 0°와 180° 사이에 엄밀하게 놓이고, 따라서 $0 < \theta < 180^\circ$이다.

정사각형의 한 변은 $|\mathbf{u}| = \frac{1}{2}AA'$이므로 넓이는 $\frac{1}{4}AA'^2$이다. OA에서 OB를 거쳐 OA'으로 돌아가면, $\mathbf{a}$와 $\mathbf{a}'$ 사이의 각은 $90^\circ + \theta$이고, $\cos(90^\circ+\theta) = -\sin\theta$이다. 코사인 법칙에 의해(또는 $|\mathbf{a}'-\mathbf{a}|^2$을 전개하면)

$$AA'^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos(90^\circ+\theta) = p^2 + q^2 + 2pq\sin\theta,$$

이므로

$$\text{넓이} = \tfrac{1}{4}\left(p^2 + q^2 + 2pq\sin\theta\right).$$

p와 q가 고정되어 있으므로, 이 값은 $\sin\theta$가 최대일 때 최대이다. $0 < \theta < 180°$에서 그런 경우는 정확히

$$\angle BOA' = \theta = 90°,$$

일 때이고, 최대 넓이는 $\frac{1}{4}(p+q)^2$이다. 이 경우 O에서의 네 각이 모두 직각이므로 A'은 AO를 O 너머로 연장한 직선 위에 놓이고, 정사각형의 한 변은 $\frac{1}{2}(p+q)$이다.

검산

- $p = 2, q = 3$으로 두자. 넓이 공식은 $\frac{1}{4}(13 + 12\sin\theta)$가 되는데, 이 값은 $\theta = 0$ 근처에서 3.25이고, $\theta = 90°$에서 $6.25 = \frac{1}{4}\cdot 5^2$까지 커졌다가, 다시 3.25 쪽으로 줄어든다. 컴퓨터로 θ를 촘촘히 훑어 보면 최댓값은 90.0°에서 나타난다.
- 대칭인 경우 $p = q, \theta = 90°$: $ABA'B'$ 자체가 중심이 O이고 한 변이 $p\sqrt{2}$인 정사각형이며, 그 중점 정사각형은 한 변이 p, 넓이가 $p^2 = \frac{1}{4}(2p)^2$으로 공식과 일치한다.
- p, q, θ를 무작위로 골라, 중점들이 넓이가 $\frac{1}{4}(p^2 + q^2 + 2pq\sin\theta)$인 정사각형을 이룬다는 것을 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- OA와 OA' 사이의 각을 $90° + \theta$가 아니라 θ로 잡는 것. 그러면 넓이가 $\frac{1}{4}(p^2 + q^2 - 2pq\cos\theta)$가 되어, θ가 180°에 가까워져야 한다는 잘못된 결론에 이른다.
- 네 변의 길이가 같다는 것만 보이는 것. 그것만으로는 마름모(rhombus)일 뿐이다. 직각도 필요한데, 여기서는 $\overrightarrow{QS} = R\,\overrightarrow{PQ}$로부터 저절로 얻어진다.

STEP 너머

직각만큼의 회전은 선형사상(linear map) $R(x,y) = (y,-x)$이고, 복소평면(complex plane)에서는 $-\mathrm{i}$를 곱하는 것이다. 전체 논증은 선형사상을 이용한 계산이다. R가 뺄셈과 교환되므로 $\mathbf{q} - \mathbf{p}$와 $\mathbf{s} - \mathbf{q}$는 R만큼 차이가 난다. 같은 아이디어로 나폴레옹 정리(Napoleon's theorem)나 반 오벨 정리(van Aubel's theorem) 같은 결과를 빠르게 증명할 수 있다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 바로 이런 방식으로 복소수의 곱셈을 통해 기하학을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.