풀이

STEP I 2015, 문제 5

순수수학 • 매개변수가 있는 적분

> **STEP I 2015, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q5

핵심 아이디어

두 적분 모두 x를 매개변수(parameter)로 고정하면 t에 대한 초등적인 원시함수(antiderivative)를 가지므로, "적분을 계산하여"라는 지시가 곧 힌트의 전부이다. 즉 x에 대한 닫힌 형태(closed form)를 구한 다음 그것을 그리면 된다. 주의할 점은 세부 사항에 있다. (i)에서는 피적분함수(integrand)가 $t = 1$에서 유계가 아닐 수 있고, (ii)에서는 제곱근이 **절댓값**(absolute value)으로 계산되므로 g는 놀랄 만큼 단순한 모양을 가진 구간별로 정의된 함수(piecewise function)가 된다.

풀이

소문항 (i)

$x > 0$을 고정하면 $(t-1)^{x-1}$의 원시함수는 $\frac{1}{x}(t-1)^x$이다. 따라서

$$f(x) = \left[\frac{(t-1)^x}{x}\right]_1^3 = \frac{2^x - 0}{x} = \frac{2^x}{x}.$$

$0 < x < 1$일 때 피적분함수 $(t-1)^{x-1}$은 $t \to 1^+$에서 무한대로 발산하므로 이 적분은 이상적분(improper integral)이다. 그러나 $x > 0$이므로 $t \to 1^+$일 때 $(t-1)^x \to 0$이 되어 적분은 수렴하고, 위의 값은 그대로 성립한다.

이제 $x > 0$에서 $y = 2^x/x$의 그래프를 그린다.

- $x \to 0^+$일 때 $2^x \to 1$이므로 $f(x) \to +\infty$이다. 즉 y축이 점근선(asymptote)이다.
- $x \to \infty$일 때 지수함수가 거듭제곱보다 빠르게 증가하므로 $f(x) \to \infty$이다(게다가 어떤 직선보다도 빠르게 증가한다).

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2^x = 2^x \ln 2$를 이용하여 미분하면

$$f'(x) = \frac{2^x \ln 2 \cdot x - 2^x}{x^2} = \frac{2^x(x\ln 2 - 1)}{x^2},$$

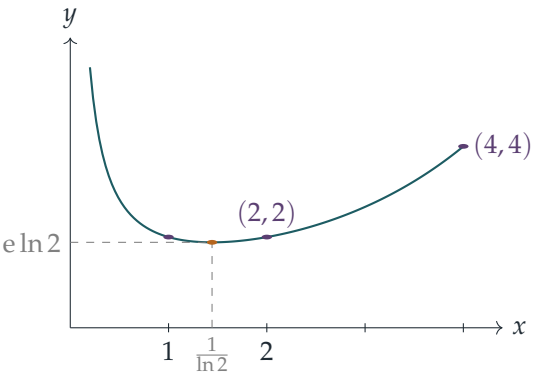
  이고, 이는 $x < 1/\ln 2$에서 음수, $x > 1/\ln 2$에서 양수이다. 따라서 정류점(stationary point)은 $x = 1/\ln 2 \approx 1.44$ 하나뿐이며, 이 점은 극소점(minimum)이다.

- 이 점에서 $2^{1/\ln 2} = \mathrm{e}^{(\ln 2)/\ln 2} = \mathrm{e}$이므로 최솟값은

$$f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \mathrm{e}\ln 2 \approx 1.88.$$

- 유용한 점: $f(1) = f(2) = 2$, $f(4) = 4$.

이 곡선은 또한 볼록(convex)하다. $\ln f(x) = x\ln 2 - \ln x$는 볼록하고(이계도함수가 $1/x^2 > 0$이다), 볼록함수의 지수함수는 볼록하기 때문이다. 따라서 그래프는 하나의 U자 모양 곡선이다.



소문항 (ii)

먼저 피적분함수가 잘 정의됨을 확인한다. $-1 \le t \le 1$에 대하여

$$1 - 2xt + x^2 \ge 1 - 2|x| + x^2 = (1 - |x|)^2 \ge 0,$$

이고, 등호는 $|x| = 1$이고 $t = \pm 1$(끝점)일 때만 성립한다. 이 경우는 아래에서 다시 다룬다.

$x = 0$이면 피적분함수가 1이므로 $g(0) = 2$이다. $x \ne 0$이면 x를 상수로 보자. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1 - 2xt + x^2) = -2x$이므로 원시함수는 $-\frac{1}{x}\sqrt{1 - 2xt + x^2}$이다. 따라서

$$g(x) = -\frac{1}{x}\left[\sqrt{1 - 2xt + x^2}\right]_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{(1+x)^2} - \sqrt{(1-x)^2}}{x} = \frac{|1+x| - |1-x|}{x}.$$

생각해 보기 왜 그냥 $\sqrt{(1+x)^2} = 1 + x$, $\sqrt{(1-x)^2} = 1 - x$라고 쓰면 안 될까?

$\sqrt{u^2} = |u|$이지 u가 아니기 때문이다. 이를 부주의하게 처리하면 모든 x에 대해 $g(x) = 2$를 얻는데, 이는 $|x|$가 클 때 분명히 틀렸다. 그때 피적분함수는 대략 $1/|x|$이므로 $g(x) \approx 2/|x|$이어야 하기 때문이다. 따라서 경우를 나누어야 한다.

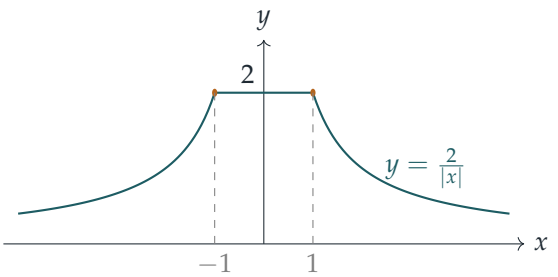
- $-1 \le x \le 1, x \ne 0$: $1+x$와 $1-x$가 모두 ≥ 0이므로 $g(x) = \dfrac{(1+x)-(1-x)}{x} = 2$이다. 이는 $g(0) = 2$와도 일치한다.
- $x > 1$: $|1+x| = 1+x$이고 $|1-x| = x-1$이므로 $g(x) = \dfrac{2}{x}$이다.
- $x < -1$: $|1+x| = -1-x$이고 $|1-x| = 1-x$이므로 $g(x) = \dfrac{-2}{x} = \dfrac{2}{|x|}$이다.

$x = \pm 1$에서는 피적분함수가 한쪽 끝점에서 유계가 아니므로(예를 들어 $x = 1$이면 피적분함수는 $1/\sqrt{2-2t}$이고, $t \to 1$일 때 발산한다) 적분은 이상적분이다. 원시함수 $-\sqrt{2-2t}$는 $t = 1$까지 연속이므로 적분은 수렴하고, 위의 공식은 여전히 $g(\pm 1) = 2$를 준다.

따라서

$$g(x) = \begin{cases} 2, & |x| \le 1, \\ \dfrac{2}{|x|}, & |x| \ge 1. \end{cases}$$

이 함수는 우함수(even function)이다(당연히 그래야 한다. t를 $-t$로 바꾸면 $g(-x) = g(x)$임을 알 수 있다). 이 함수는 모든 점에서 연속(continuous)이고, $[-1, 1]$에서 상수이며, 점근선 $y = 0$을 향해 $2/|x|$처럼 감소한다. $x = \pm 1$에서는 꺾인 점이 있다. 한쪽 기울기가 0(안쪽)과 ∓ 2(바깥쪽)이므로 g는 그 점에서 미분가능(differentiable)하지 않다.



검산

- 소문항 (i)에서 $x = 1$일 때: 피적분함수가 1이므로 $f(1) = 2$이고, 이는 $2^1/1$과 일치한다. $x = 2$일 때 적분은 $\int_1^3 (t-1)\,\mathrm{d}t = 2$이고, 이는 $2^2/2$와 일치한다.
- 소문항 (ii)에서 $x = 0$일 때: 피적분함수가 1이고 $g(0) = 2$이다. $|x|$가 크면 피적분함수는 길이가 2인 구간 위에서 $1/|x|$에 가까우므로 $2/|x|$와 일치한다.

- 수치적으로 $\int_1^3 (t-1)^{0.5}\,\mathrm{d}t = 1.8856\ldots = 2^{1.5}/1.5$이다. (ii)의 적분은 $x = 1.2$일 때 $1.6667 = 2/1.2$이고, $x = 0.8$일 때 2.0000이다.

흔한 실수

- 모든 x에 대해 $\sqrt{(1-x)^2} = 1 - x$라고 쓰고, g가 상수라고 결론짓는 것.
- (i)의 적분이 $0 < x < 1$에서 이상적분이라는 사실, 또는 $(t-1)^x$가 $t = 1$에서 0이 되는 것은 오직 $x > 0$이기 때문이라는 사실을 잊는 것.
- g를 $x = \pm 1$에서 매끄럽게 그리는 것. 두 조각은 서로 다른 기울기로 만난다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 모습을 바꾼 뉴턴(Newton)의 껍질 정리(shell theorem)이다. $t = \cos\theta$로 놓으면 $1/\sqrt{1-2xt+x^2}$은 단위구의 중심에서 거리 x만큼 떨어진 점과 구면 위의 한 점 사이 거리의 역수이다. 따라서 g는 (상수배를 제외하면) 균일한 구 껍질이 만드는 중력 퍼텐셜(gravitational potential)이다. 이 퍼텐셜은 껍질 안쪽에서는 상수이고, 바깥쪽에서는 점질량의 퍼텐셜과 같다. 같은 식은 르장드르 다항식(Legendre polynomials)의 생성함수(generating function) $\sum_n P_n(t)x^n$이기도 하며, $|x| < 1$에서 $g(x) = 2$라는 사실은 $n \geq 1$인 모든 P_n을 $[-1, 1]$에서 적분하면 0이 된다는 사실을 반영한다. x를 매개변수로 두고 t^{x-1}을 적분하는 소문항 (i)은 감마 함수(Gamma function)와 베타 함수(Beta function)로 나아가는 첫걸음이다. Mary Boas의 *Mathematical Methods in the Physical Sciences*(물리 과학의 수학적 방법)는 르장드르 다항식과 감마 함수를 딱 알맞은 수준으로 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.