풀이

STEP I 2015, 문제 4

순수수학 • 매개변수 곡선과 넓이

> **STEP I 2015, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q4

핵심 아이디어

곡선의 기울기(gradient)를 매개변수(parameter)로 쓴다. 중점(midpoint)에서의 접선(tangent)이 x축과 이루는 각이 θ이면 그 점에서의 기울기는 $\tan\theta$이고, 이것으로 중점이 정해진다. 그러면 각 끝점은 단위벡터(unit vector) $(\cos\theta, \sin\theta)$ 방향으로 중점에서 거리 b만큼 떨어진 점이다. 넓이를 구할 때는 반쪽 막대(rod) AP가 P에서의 접선 위에 놓이므로, 영역은 포물선(parabola)과 그 접선 하나 사이의 틈일 뿐이며, 그 피적분함수(integrand)는 완전제곱식(perfect square)이다.

풀이

끝점의 자취

중점을 P라 하고, 막대가 양의 x축과 이루는 각을 θ라 하자. $y = \frac{1}{4}x^2$에서 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}x$이고 막대는 P에서 곡선에 접하므로

$$\tfrac{1}{2}x_P = \tan\theta, \qquad \text{따라서} \qquad P = (2\tan\theta,\ \tan^2\theta).$$

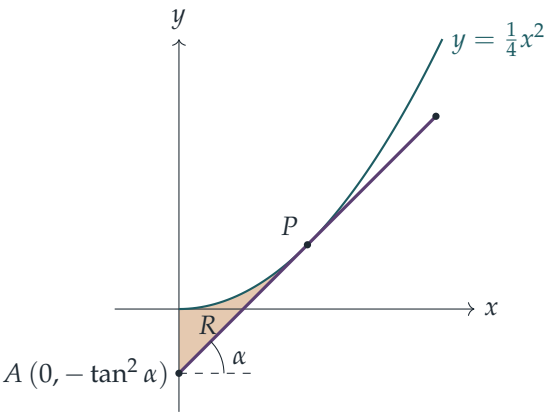
조건 $x \geq 0$에서 $\tan\theta \geq 0$이므로 $0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$로 잡을 수 있다. θ가 이 범위를 움직이면 $2\tan\theta$는 $[0, \infty)$의 모든 값을 취하므로, 중점의 각 위치는 정확히 하나의 θ에서 나온다.

막대 방향의 단위벡터는 $(\cos\theta, \sin\theta)$이고, 각 끝점은 P에서 거리 b만큼 떨어져 있다. 따라서 끝점은 $P \pm b(\cos\theta, \sin\theta)$이다. 음의 부호(아래쪽, 왼쪽 끝점)를 택하면

$$x = 2\tan\theta - b\cos\theta,$$
$$y = \tan^2\theta - b\sin\theta,$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. (다른 쪽 끝점은 $-b$ 대신 $+b$를 넣은 같은 식으로 나타난다.)

R의 넓이



y축에 닿는 끝점은 $x = 2\tan\theta - b\cos\theta$인 쪽이다. 다른 끝점은 항상 $x = 2\tan\theta + b\cos\theta > 0$이기 때문이다. 따라서 $\theta = \alpha$일 때

$$2\tan\alpha = b\cos\alpha.$$

A의 y좌표는 $\tan^2\alpha - b\sin\alpha$이고, 바로 앞의 식을 이용하여 b를 소거할 수 있다.

$$b\sin\alpha = (b\cos\alpha)\tan\alpha = 2\tan^2\alpha, \qquad \text{따라서} \qquad A = (0, -\tan^2\alpha).$$

생각해 보기 A는 원점에 대해 어디에 있는가? 그리고 직선 AP의 방정식은 무엇인가?

A는 원점 아래에 있고, 직선 AP는 P에서 포물선에 그은 접선이다. $t = \tan\alpha$로 놓자. $P = (2t, t^2)$에서의 접선은 기울기가 t이므로 그 방정식은

$$y = t^2 + t(x - 2t) = tx - t^2,$$

이고, 실제로 $A = (0, -t^2)$을 지난다. 또한

$$\tfrac{1}{4}x^2 - (tx - t^2) = (\tfrac{1}{2}x - t)^2 \geq 0.$$

이므로 포물선은 이 접선보다 위에 있다. 따라서 R은 $0 \leq x \leq 2t$이고 직선 AP(아래)와 곡선(위) 사이에 있는 점들의 집합이다. 그 왼쪽 경계는 y축 위에서 A부터 O까지의 선분이다. 그러므로

$$\begin{aligned} \text{넓이} R &= \int_0^{2t} \left(\tfrac{1}{4}x^2 - (tx - t^2)\right) \mathrm{d}x = \int_0^{2t} (\tfrac{1}{2}x - t)^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \left[\tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2}x - t)^3\right]_0^{2t} = 0 - \tfrac{2}{3}(-t)^3 = \tfrac{2}{3}t^3. \end{aligned}$$

따라서 R의 넓이는 $\frac{2}{3}\tan^3\alpha$이고, 요구된 결과를 얻는다.

b가 완전히 사라졌다는 점에 주목하자. 넓이는 P에서의 접선이 y축과 만나는 위치에만 의존한다. 물론 b와 α는 $2\sin\alpha = b\cos^2\alpha$로 연결되어 있으므로 b가 α를 결정한다.

검산

- $\alpha = \frac{1}{4}\pi$(그림의 경우)로 잡자. 그러면 $b\cos\alpha = 2$에서 $b = 2\sqrt{2}$이고, $P = (2,1)$, $A = (0,-1)$이다. 넓이는 $\int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 - x + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3} - 2 + 2 = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\tan^3\frac{1}{4}\pi$이다.
- $b = 2$일 때 $2\tan\alpha = 2\cos\alpha$를 수치적으로 풀면 $\alpha \approx 0.6662$이고, 수치적분(numerical integration)으로 구한 넓이는 0.32391로 $\frac{2}{3}\tan^3\alpha$와 일치한다.
- $b \to 0$이면 $\alpha \to 0$이고, 공식이 예측하는 대로 영역은 줄어들어 사라진다.

흔한 실수

- 영역을 x축에서 나누고 그 아래의 삼각형을 빠뜨리는 것. 접선과 곡선 사이의 적분 하나로 두 부분을 한꺼번에 처리할 수 있다.
- 막대의 엉뚱한 끝점을 쓰는 것. $+b\cos\theta$인 끝점은 결코 y축에 닿을 수 없다.
- $b\cos\alpha = 2\tan\alpha$를 이용해 b를 소거하지 않고 답에 b를 남겨 두는 것.

STEP 너머

중점은 포물선을 그리고, 각 끝점은 접선을 따라 일정한 거리 b만큼 떨어진 곡선을 그린다. 기존 곡선의 접선으로부터 새로운 곡선을 만드는 것은 평면곡선의 미분기하학(differential geometry)에서 흔히 다루는 주제이며(신개선(involute), 포락선(envelope), 추적선(tractrix)이 고전적인 예이다), 대학 1학년 과정에서 호의 길이(arc length), 곡률(curvature)과 함께 배운다. 넓이에 대한 깔끔한 답은 아르키메데스(Archimedes)의 포물선 구적법(quadrature)을 떠올리게 하는데, 이것은 포물선 활꼴의 넓이가 어떤 내접 삼각형 넓이의 $\frac{4}{3}$배임을 보여 준다. 이런 성격의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.