풀이

STEP I 2015, 문제 3

순수수학 • 좌표기하와 가시성

STEP I 2015, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

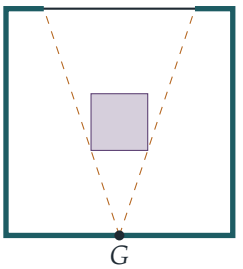
step.maths.org/questions/15-s1-q3

핵심 아이디어

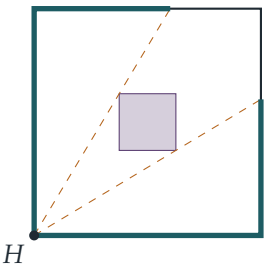
경비원의 시야는 건물에 가려지는데, 건물이 볼록(convex)한 정사각형이므로 건물의 한 꼭짓점을 스치듯 지나는 직선이 벽에서 보이는 부분이 끝나는 곳을 정한다. 따라서 각 위치마다 이러한 스치는 직선을 그리고, 그 직선이 둘레 벽과 만나는 점을 찾은 다음, 보이는 길이를 모두 더한다. 모든 계산은 닮은 삼각형(similar triangles)(또는 직선의 방정식)으로 해결된다. 수 $3a$는 벽의 중앙에서 그은 스치는 직선이 마당의 모서리에 정확히 닿을 때의 b의 값으로 나타난다.

풀이

원점을 중심에 두면, 둘레 벽은 변이 $x = \pm\frac{b}{2}, y = \pm\frac{b}{2}$ 위에 있는 정사각형이고, 건물은 정사각형 $|x| \leq \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{a}{2}$이며, $0 < a < b$이다. 둘레의 전체 길이는 $4b$이다. 경비원에서 벽 위의 점 Q까지의 선분이 건물을 지나지 않을 때, 그리고 그때에만 경비원은 Q를 볼 수 있다.



벽의 중앙 ($b > 3a$)



모서리

벽에서 굵게 (청록색으로) 표시된 부분이 경비원이 볼 수 있는 부분이고, 점선은 건물의 꼭

짓점을 스치는 직선이다.

벽의 중앙에 있는 경비원

경비원이 아래쪽 벽의 중앙인 $G = (0, -\frac{b}{2})$에 있다고 하자. 건물이 아래쪽 벽보다 엄밀히 위에 있으므로 아래쪽 벽 전체가 보이며, 그 길이는 b이다. y축에 대한 대칭(symmetry)에 의해 오른쪽만 살펴보면 된다.

오른쪽 위로 향하는 시선은 가장 가까운 꼭짓점 $K = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$의 오른쪽을 지날 때, 그리고 그때에만 건물을 피한다. (이 직선은 먼저 $y = -\frac{a}{2}$와 만나고 올라갈수록 x좌표가 커지므로, 높이 $-\frac{a}{2}$에서 건물의 오른쪽에 있으면 계속 오른쪽에 있다. 그 높이에서 K의 왼쪽에 있으면 높이 $-\frac{a}{2}$에서의 x좌표가 0과 $\frac{a}{2}$ 사이이므로 건물 안으로 들어간다.) 따라서 G가 보는 영역의 경계는 직선 GK이다. 이 직선은 가로로 $\frac{a}{2}$만큼 갈 때 $\frac{b-a}{2}$만큼 올라가므로 기울기(gradient)는 $\frac{b-a}{a}$이다.

이 직선은 오른쪽 벽 $x = \frac{b}{2}$와 다음 높이에서 만난다.

$$y_1 = -\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \cdot \frac{b-a}{a} = -\frac{b}{2} + \frac{b(b-a)}{2a}.$$

이 직선이 그 벽의 꼭대기에 닿는 것($y_1 \geq \frac{b}{2}$)은 $\frac{b-a}{a} \geq 2$일 때, 곧 $b \geq 3a$일 때, 그리고 그때에만이다.

? 생각해 보기 여기서 왜 b와 $3a$의 비교가 등장하는가?

이 비교가 스치는 직선 GK가 어느 벽에 닿는지를 결정한다. $b < 3a$이면 오른쪽 벽에, $b > 3a$이면 맞은편(위쪽) 벽에 닿는다. 두 경우는 보이는 길이에 대해 서로 다른 공식을 준다.

$b < 3a$인 경우. 경비원은 오른쪽 벽을 아래쪽 모서리에서 높이 y_1까지 보며, 그 길이는

$$y_1 + \frac{b}{2} = \frac{b(b-a)}{2a},$$

이고, 그보다 위는 보지 못한다(그 벽의 더 높은 점이나 위쪽 벽으로 가는 모든 직선은 K의 왼쪽을 지난다). 왼쪽의 대응하는 부분까지 더하면 보이는 전체 길이는

$$M = b + 2 \cdot \frac{b(b-a)}{2a} = b + \frac{b(b-a)}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

$b > 3a$인 경우. 이제 오른쪽 벽 전체(길이 b)가 보이고, 직선 GK는 b만큼 올라간 뒤 위쪽 벽 $y = \frac{b}{2}$와 만나므로, 만나는 점은

$$x = \frac{a}{b-a} \cdot b = \frac{ab}{b-a},$$

이며, $2a < b - a$이므로 이 값은 $\frac{b}{2}$보다 작다. 경비원은 위쪽 벽을 그 점에서 모서리까지 보며, 그 길이는 $\frac{b}{2} - \frac{ab}{b-a} = \frac{b(b-3a)}{2(b-a)}$이다. 아래쪽 벽, 양쪽 옆 벽, 위쪽 벽의 두 부분을 모두 더하

면

$$M = 3b + \frac{b(b-3a)}{b-a} = \frac{3b(b-a)+b(b-3a)}{b-a} = \frac{b(4b-6a)}{b-a}.$$

모서리에 있는 경비원

경비원이 $H = (-\frac{b}{2}, -\frac{b}{2})$에 있다고 하자. H를 지나는 두 벽은 전부 보이며, 그 길이는 $2b$이다. 그림은 대각선 $y = x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 벽을 살펴보자. 앞에서와 같은 논리로, 보이는 부분은 H와 꼭짓점 $K = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$를 지나는 직선에 의해 잘리며, 이 직선의 기울기는

$$\frac{\frac{b}{2}-\frac{a}{2}}{\frac{b}{2}+\frac{a}{2}} = \frac{b-a}{b+a}.$$

벽 $x = \frac{b}{2}$까지 가로로 b만큼 가는 동안 이 직선은 $\frac{b(b-a)}{a+b}$만큼 올라가는데, 이는 b보다 작으므로 a와 b의 값에 관계없이 이 직선은 항상 오른쪽 벽에 닿는다. 경비원은 오른쪽 벽의 길이 $\frac{b(b-a)}{a+b}$만큼과 위쪽 벽의 같은 길이만큼을 보며, 두 벽의 나머지 부분은 보지 못한다. 따라서

$$C = 2b + \frac{2b(b-a)}{a+b} = \frac{2b(a+b)+2b(b-a)}{a+b} = \frac{4b^2}{a+b}.$$

두 위치의 비교

$b < 3a$인 경우.

$$C - M = \frac{4b^2}{a+b} - \frac{b^2}{a} = \frac{b^2(4a-(a+b))}{a(a+b)} = \frac{b^2(3a-b)}{a(a+b)} > 0,$$

이므로 **모서리**가 더 낫다.

$b > 3a$인 경우.

$$M - C = \frac{b(4b-6a)}{b-a} - \frac{4b^2}{a+b} = \frac{b[(4b-6a)(a+b)-4b(b-a)]}{(b-a)(a+b)} = \frac{2ab(b-3a)}{(b-a)(a+b)} > 0,$$

이다. 왜냐하면 $(4b-6a)(a+b)-4b(b-a) = 4b^2-2ab-6a^2-4b^2+4ab = 2ab-6a^2$이기 때문이다. 따라서 **벽의 중앙**이 더 낫다.

$b = 3a$일 때는 M에 대한 두 공식이 모두 $9a$를 주고, $C = \frac{36a^2}{4a} = 9a$이기도 하므로 두 위치는 똑같이 좋다.

검산

- $a = 1, b = 2$로 두면 $M = 4$이고 $C = \frac{16}{3} \approx 5.33$이므로 모서리가 낫다. $a = 1, b = 5$로 두면 $M = \frac{5 \cdot 14}{4} = 17.5$이고 $C = \frac{100}{6} \approx 16.67$이므로 중앙이 낫다. 이 값들은 벽 둘레의 수천 개의 점까지의 시선을 검사하는 컴퓨터 계산으로 확인하였다.

- $b \to a$이면 건물이 마당을 가득 채운다. 이때 $M \to a$(경비원이 있는 벽만 보임)이고 $C \to 2a$(모서리에서 만나는 두 벽)이며, 이는 마땅히 그래야 하는 결과이다.
- $b \to \infty$이면 건물은 무시할 만큼 작아진다. 이때 $M = \frac{b(4b-6a)}{b-a}$와 $C = \frac{4b^2}{a+b}$는 모두 전체 둘레 $4b$에 가까워지며, 둘 다 그보다 작은 값을 유지한다.

흔한 실수

- $b > 3a$일 때 벽의 중앙에 있는 경비원이 양쪽 옆 벽뿐만 아니라 맞은편 벽의 일부도 볼 수 있다는 사실을 잊는 것.
- 건물의 엉뚱한 꼭짓점을 스치는 직선을 쓰는 것. 아래쪽에서 볼 때 중요한 꼭짓점은 아래쪽의 두 꼭짓점 $(\pm\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$이다.
- 경비원이 있는 벽(또는 벽들)을 합계에서 빠뜨리는 것.

STEP 너머

한 점에서 영역의 어느 부분이 보이는지에 관한 문제는 계산 기하학(computational geometry)에 속한다. 고전적인 "미술관 정리(art gallery theorem)"에 따르면, 벽이 n개인 다각형(polygon) 모양의 미술관의 모든 점을 감시하는 데에는 언제나 $\lfloor n/3 \rfloor$명의 경비원으로 충분하며, 때로는 그만큼이 꼭 필요하다. 여기서 한 것처럼 가시 영역(visibility region)을 구하는 것은 이러한 문제의 기본 단계이며, 컴퓨터 그래픽스에서도 마찬가지인데, 그곳에서 은면 제거(hidden-surface removal)도 같은 방식으로 이루어진다. 이런 유형의 문제를 더 원한다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)가 좋은 다음 단계이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.