풀이

STEP I 2015, 문제 2

순수수학 • 삼차방정식의 삼각함수 해법

> **STEP I 2015, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q2

핵심 아이디어

삼차식 $4x^3 - 3x$는 정확히 삼배각 공식(triple-angle formula)이 만들어 내는 식이다: $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. 따라서 이런 꼴의 삼차방정식은 코사인 값을 추측하여 풀 수 있다. 근 하나를 알면 인수분해한 뒤 남은 이차방정식을 풀면 된다. 마지막 소문항에서는 $y = 2x$로 크기를 바꾸면 주어진 삼차식이 이 꼴이 되고, 필요한 정확한 값은 소문항 (i)에서 얻는다.

풀이

소문항 (i)

$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$로 쓰고 덧셈정리(compound-angle formulae)를 이용하면

$$\cos 15^\circ = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. 같은 방법으로

$$\sin 15^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

분모를 유리화하면 다음과 같은 동치인 꼴을 얻는다.

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \qquad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

소문항 (iii)에서는 이 꼴이 더 쓰기 편하다.

소문항 (ii)

$c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$라 하자. $\cos(2\alpha + \alpha)$를 전개하면

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha \\ &= (2c^2 - 1)c - 2s^2 c \\ &= 2c^3 - c - 2(1 - c^2)c \\ &= 4c^3 - 3c.\end{aligned}$$

따라서 $4c^3 - 3c - \cos 3\alpha = 0$이므로 $x = \cos\alpha$는 근이다.

나머지 근을 구하기 위해 $\cos 3\alpha$를 $4c^3 - 3c$로 바꾸고 인수분해한다.

$$\begin{aligned}4x^3 - 3x - (4c^3 - 3c) &= 4(x^3 - c^3) - 3(x - c) \\ &= (x - c)(4x^2 + 4cx + 4c^2 - 3).\end{aligned}$$

생각해 보기 이차 인수의 판별식을 어떻게 간단히 할 수 있을까?

$c^2 + s^2 = 1$을 이용하면 판별식(discriminant)은 $16c^2 - 16(4c^2 - 3) = 48(1 - c^2) = 48s^2$이다. 그 제곱근은 $4\sqrt{3}\,|s|$이지만, 부호 $\pm$를 모두 택하므로 절댓값 기호는 없애도 된다. 근의 공식에 의해

$$x = \frac{-4c \pm 4\sqrt{3}\,s}{8},$$

이므로 나머지 두 근은

$$x = -\tfrac{1}{2}\cos\alpha + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha \quad \text{그리고} \quad x = -\tfrac{1}{2}\cos\alpha - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$$

이 값들은 $\cos(\alpha - 120^\circ)$와 $\cos(\alpha + 120^\circ)$이다. 이는 자연스러운 결과이다. $3(\alpha \pm 120^\circ) = 3\alpha \pm 360^\circ$이므로 이 각들은 α와 같은 $\cos 3\theta$ 값을 가진다.

소문항 (iii)

생각해 보기 주어진 삼차식은 $4x^3 - 3x - \cdots$가 아니라 $y^3 - 3y - \sqrt{2}$이다. 두 식을 어떻게 맞출 수 있을까?

소문항 (ii)에서처럼 삼차항과 일차항의 계수의 비가 4 대 3이 되도록 하고 싶다. $y = 2x$로 놓으면

$$8x^3 - 6x - \sqrt{2} = 0 \iff 4x^3 - 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

이는 $\cos 3\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$인 소문항 (ii)의 방정식이므로 $\alpha = 15^\circ$로 잡을 수 있다. 그러면 소문항 (ii)에서 세 근 x를 얻는다. 이 근들은 서로 다르므로(아래 참고) 삼차방정식의 근

전부이고, $y = 2x$에 의해

$$y = 2\cos\alpha, \qquad y = -\cos\alpha \pm \sqrt{3}\sin\alpha, \qquad \alpha = 15^\circ.$$

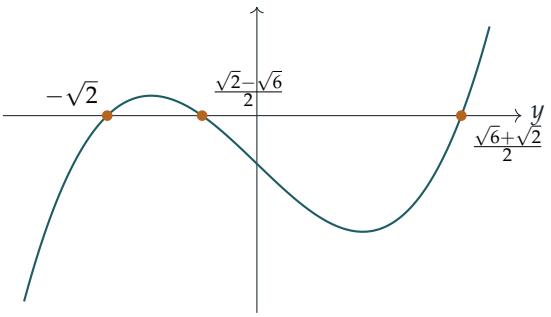
이제 소문항 (i)의 값을 대입한다.

- $y = 2\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.
- $y = -\cos 15^\circ + \sqrt{3}\sin 15^\circ = \dfrac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{18}-\sqrt{6})}{4}$이고, 이를 간단히 하면 $\dfrac{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$이다.
- $y = -\cos 15^\circ - \sqrt{3}\sin 15^\circ = \dfrac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2})-(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4} = -\sqrt{2}$.

여기서 $\sqrt{3}\sqrt{6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$를 이용하였다. 이 세 값은 분명히 서로 다르다. 따라서 해는

$$y = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \qquad y = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}, \qquad y = -\sqrt{2}.$$

각으로 나타내면 이 값들은 $2\cos 15^\circ$, $2\cos 255^\circ$, $2\cos 135^\circ$이다.



검산

- $y^3 - 3y - \sqrt{2}$의 y^2의 계수가 0이므로 근의 합은 0이어야 한다. 실제로 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} - \sqrt{2} = 0$이다.
- 근의 곱은 $\sqrt{2}$여야 한다. $(\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{6}) = 2-6 = -4$이므로 근의 곱은 $(-1)\cdot(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$이다.
- 근 $y = -\sqrt{2}$는 직접 확인하기 쉽다: $-2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$. 수치로는 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \approx 1.93185$이고, $(1.93185)^3 - 3(1.93185) \approx 1.41421 = \sqrt{2}$이다.
- 소문항 (ii)에서 $\alpha = 0$이면 방정식 $4x^3 - 3x - 1 = 0$, 즉 $(x-1)(2x+1)^2 = 0$을 얻는다. 공식은 근 $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$를 주며, 이는 예상한 대로이다.

흔한 실수

- 소문항 (iii)에서 크기를 바꾸는 것을 잊고 $4x^3 - 3x - \sqrt{2} = 0$을 푸는 실수. 이 방정식은 $\cos 3\alpha = \sqrt{2} > 1$이 되어야 하므로 불가능하다.
- $y = 2x$가 아니라 x에 대한 답을 쓰는 실수.
- $\pm$ 부호가 $\sin\alpha < 0$인 경우를 처리해 준다는 점을 언급하지 않고 $\sqrt{3(1-c^2)} = \sqrt{3}\sin\alpha$로 쓰는 실수.

STEP 너머

이것은 세 실근을 가진 삼차방정식을 푸는 삼각함수를 이용한 방법으로, 비에트(Viète)가 고안하였다. 어떤 삼차식이든 평행이동하여 이차항을 없애면 $t^3 + pt + q = 0$ 꼴이 된다. $p < 0$일 때 $t = 2\sqrt{-p/3}\,x$로 크기를 바꾸면 이 식은 $4x^3 - 3x = k$가 된다. 이 경우에는 카르다노(Cardano)의 공식이 도움이 되지 않는데, 세 근이 모두 실수인데도 음수의 제곱근을 거쳐야 하기 때문이다. 왜 이런 일이 생기는지, 그리고 왜 코사인을 이용한 방법은 이를 피해 가는지를 살펴보면 자연스럽게 복소수(complex numbers)와 단위근(roots of unity)으로 이어진다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이에 대한 아름다운 기하학적 그림을 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.