풀이

STEP I 2015, 문제 11

역학 • 마찰과 모멘트

> **STEP I 2015, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q11

핵심 아이디어

원기둥에 작용하는 수직항력(normal reaction)은 모두 반지름 방향으로 작용하므로 중심을 지난다. 따라서 각 중심에 대한 모멘트(moment)를 취하면 무게와 모든 수직항력이 사라지고, 중심에서 모두 같은 거리에 작용하는 마찰력(frictional force)만 남는다. 그러면 소문항 (i)은 거의 공짜로 얻어진다. 소문항 (ii)에서는 각 원기둥에 대해 경사면 방향으로 힘을 분해한 다음, 부등식이 다루는 두 접촉점에 마찰 법칙을 적용한다.

풀이

두 원기둥을 반지름이 r인 균일한 강체(rigid body) 원기둥으로 모형화한다. 두 원기둥은 모두 경사면에 닿아 있고, 위쪽 원기둥이 경사면을 따라 더 높은 곳에 있다. 반지름이 같으므로 두 중심을 잇는 선은 경사면과 평행하고, 따라서 두 원기둥이 닿는 점은 경사면으로부터 높이 r인 곳, 즉 두 중심과 같은 높이에 있다. 두 원기둥 사이의 수직력은 중심을 잇는 선을 따라(경사면과 평행하게) 작용하고, 두 원기둥 사이의 마찰력은 경사면에 수직으로 작용한다.

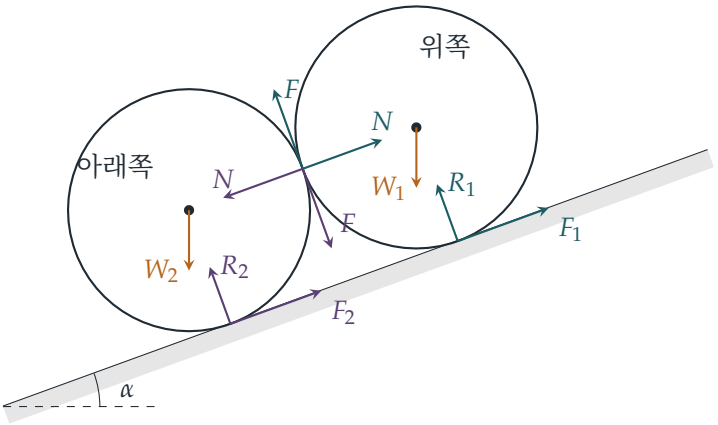
경사면을 따라 올라가는 방향을 x 방향, 경사면에 수직이고 경사면에서 멀어지는 방향을 y 방향으로 잡는다. 다음과 같이 놓자.

- R_1, R_2는 경사면이 위쪽 원기둥과 아래쪽 원기둥에 작용하는 수직항력이다.
- F_1, F_2는 경사면이 위쪽 원기둥과 아래쪽 원기둥에 작용하는 마찰력으로, 경사면을 따라 **올라가는** 방향으로 잰다(부호를 허용하므로, 값이 음수이면 경사면을 따라 내려가는 방향을 뜻한다).
- N은 아래쪽 원기둥이 위쪽 원기둥에 작용하는 수직력으로, 경사면을 따라 올라가는 방

향으로 작용한다.

- F는 아래쪽 원기둥이 위쪽 원기둥에 작용하는 마찰력으로, 경사면에서 **멀어지는** 방향으로 잰다(역시 부호를 허용한다).

뉴턴 제3법칙(Newton's third law)에 의해 위쪽 원기둥은 아래쪽 원기둥에 경사면을 따라 내려가는 방향으로 N을, 경사면을 향하는 방향으로 F를 작용한다.



위쪽 원기둥에 작용하는 힘은 청록색으로, 아래쪽 원기둥에 작용하는 힘은 자주색으로 나타내었다.

소문항 (i)

위쪽 원기둥의 중심에 대한 모멘트를 취한다. 무게는 중심에 작용하고, R_1과 N은 모두 반지름 방향으로 작용하므로 이들 중 어느 것도 모멘트를 갖지 않는다. 남는 것은 두 마찰력뿐이며, 각각 중심에서 거리 r인 곳에서 접선 방향으로 작용한다.

- F_1은 원기둥의 가장 낮은 점에서 경사면을 따라 올라가는 방향으로 작용하여 (그림에서) 반시계 방향으로 크기 rF_1의 모멘트를 준다.
- F는 중심보다 경사면 아래쪽에 있는 접촉점에서 경사면으로부터 멀어지는 방향으로 작용하여 시계 방향으로 크기 rF의 모멘트를 준다.

평형(equilibrium)이려면 이 둘이 균형을 이루어야 하므로 $rF_1 = rF$, 즉 $F_1 = F$이다.

? 생각해 보기 중심에 대한 모멘트를 취할 때 왜 수직항력을 무시할 수 있을까?

원에 작용하는 수직항력은 접촉점에서의 접선에 수직이므로 반지름 위에 놓이고, 그 작용선은 중심을 지난다. 따라서 중심에 대한 모멘트는 0이다. 바로 이 때문에 여기서는 중심에 대한 모멘트를 취하는 것이 올바른 선택이다.

아래쪽 원기둥에 대해서도 마찬가지로, 모멘트를 갖는 것은 F_2(가장 낮은 점에서 경사면을 따라 올라가는 방향, 반시계 방향 모멘트 rF_2)와, 중심보다 경사면 위쪽에 있는 접촉점에서 경사면을 향해 작용하는 마찰력 F(시계 방향 모멘트 rF)뿐이다. 따라서 $F_2 = F$이다.

그러므로 부호를 포함한 양으로서 $F = F_1 = F_2$이고, 특히 그 크기가 같으므로 증명이 끝났다.

소문항 (ii)

각 원기둥에 대해 경사면과 평행한 방향으로 힘을 분해하면

$$\begin{aligned} \text{위쪽:} \quad & F_1 + N = W_1 \sin\alpha, \\ \text{아래쪽:} \quad & F_2 = N + W_2 \sin\alpha. \end{aligned}$$

두 식을 더하고 $F_1 = F_2 = F$를 이용하면

$$2F = (W_1 + W_2)\sin\alpha, \qquad \text{따라서} \qquad F = \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha > 0,$$

이며, 이로부터 모든 마찰력이 그림에 그린 방향으로 작용함도 알 수 있다. 다시 대입하면

$$N = W_1 \sin\alpha - F = \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha,$$

이고, $W_1 > W_2$이고 $\alpha > 0$이므로 이 값은 양수이다. 즉 두 원기둥은 실제로 서로를 누르고 있다. 위쪽 원기둥에 대해 경사면에 수직인 방향으로 힘을 분해하면

$$R_1 + F = W_1 \cos\alpha, \qquad \text{따라서} \qquad R_1 = W_1 \cos\alpha - F.$$

? 생각해 보기 실제로 필요한 마찰 부등식은 어느 것일까?

평형 상태에서 각 접촉점의 마찰력은 그곳의 마찰 계수(coefficient of friction)와 수직항력의 곱을 넘을 수 없다. 첫 번째 결과는 두 원기둥 사이의 접촉에서, 두 번째 결과는 위쪽 원기둥과 경사면 사이의 접촉에서 나온다. (아래쪽 접촉에서는 μ_2가 들어간 세 번째 조건이 나오지만, 이것은 묻지 않았다.)

두 원기둥 사이. $F \le \mu N$이어야 하므로

$$\tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha \le \mu \cdot \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha.$$

양수인 $\frac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha$로 나누면

$$\mu \ge \frac{W_1 + W_2}{W_1 - W_2},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

위쪽 원기둥과 경사면 사이. $F \le \mu_1 R_1 = \mu_1(W_1 \cos\alpha - F)$이어야 하므로

$$(1+\mu_1)F \le \mu_1 W_1 \cos\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}(1+\mu_1)(W_1+W_2)\sin\alpha \le \mu_1 W_1 \cos\alpha.$$

경사면(inclined plane)의 각은 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$를 만족하므로 $\cos\alpha > 0$이고, $(1+\mu_1)(W_1+W_2) > 0$이다. 이 둘로 나누면

$$\tan\alpha \le \frac{2\mu_1 W_1}{(1+\mu_1)(W_1+W_2)},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. ($\mu_1 R_1 \ge F > 0$이므로 이 조건은 $R_1 > 0$도 보장한다. 즉 위쪽 원기둥은 경사면에서 떨어지지 않는다.)

검산

- $W_1 = 3, W_2 = 1$이면 $\mu \ge 2$이어야 하고, 여기에 $\mu_1 = 1$까지 주어지면 $\tan\alpha \le \frac{3}{4}$이어야 한다. 이런 값을 여섯 개의 평형 방정식(원기둥마다 두 개의 분해식과 하나의 모멘트 방정식)에 대입하여 직접 풀면 위와 같은 F, N, R_1을 얻는다.
- $W_1 \to W_2$이면 μ의 하한은 무한대로 간다. 이는 타당하다. 이때 $N \to 0$이므로 두 원기둥은 서로를 거의 누르지 않는데, 그 사이의 마찰력은 여전히 $\frac{1}{2}(W_1+W_2)\sin\alpha$이어야 하기 때문이다.
- $\mu_1 \to \infty$이면 조건은 $\tan\alpha \le 2W_1/(W_1+W_2)$가 되는데, 이것은 정확히 $R_1 \ge 0$이라는 조건이다. 위쪽 원기둥이 떠오르기 시작하면 아무리 거친 경사면이라도 도움이 되지 않는다.

흔한 실수

- 두 원기둥 사이의 마찰력이 경사면을 따라 작용한다고 보는 것. 마찰력은 접촉점에서의 공통 접선을 따라 작용하며, 여기서는 그 방향이 경사면에 수직이다.
- 모멘트 방정식을 잊는 것. 힘의 분해만으로는 미지수 여섯 개에 대한 방정식 네 개만 얻는다. 마찰력을 결정하는 것은 두 모멘트 방정식이다.
- 수직항력 R_1에서 F를 빠뜨리는 것. 아래쪽 원기둥의 마찰력이 위쪽 원기둥을 경사면에서 멀어지는 방향으로 밀기 때문에 R_1은 $W_1\cos\alpha$보다 작다.

STEP 너머

강체가 평형 상태에 있으려면 합력(resultant force)과 합모멘트(resultant moment)가 모두 0이어야 하며, 모멘트를 취할 점을 영리하게 고르는 것이 강체 정역학(rigid-body statics)의

핵심 기술이다. 이 문제에서는 방정식의 개수가 미지수의 개수와 정확히 같았다. 미지수가 방정식보다 많으면 그 문제는 **정역학적으로 부정정**(*statically indeterminate*)이며, 풀이를 마치려면 물체가 어떻게 변형되는지까지 모형화해야 한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체 정역학과 돌림힘(torque)을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.