풀이

STEP I 2015, 문제 10

역학 • 상대 속도

> **STEP I 2015, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q10

핵심 아이디어

면에 닿는 비는 선속(flux)이다. 단위 시간당 양은 (단위 부피당 빗방울 수) × (넓이) × (면에 수직인 빗방울 속도 성분)이다. 버스가 움직일 때는 버스의 기준틀(frame)에서 생각하는데, 이때 빗방울 속도의 수평 성분만 바뀐다. 그런 다음 전체 이동에 대해 이 비율에 이동 시간 D/u를 곱하고 u에 대해 최소화한다. 절댓값(modulus) 때문에 버스가 비의 수평 운동보다 느린지 빠른지에 따라 두 경우로 나뉜다.

풀이

비가 버스에 닿는 비율

비를 공기 중에 고르게 퍼져 있는 빗방울로 모형화하고, 단위 부피당 빗방울이 n개이며 모두 같은 속도로 움직인다고 하자. 버스의 너비를 b라 하자. 북쪽을 수평 방향의 양의 방향으로 잡는다. 남쪽에서 오는 비는 북쪽으로 움직이므로, 그 속도는 다음과 같다.

$$\text{수평 성분} v\cos\theta \text{ (북쪽)}, \qquad \text{수직 성분} v\sin\theta \text{ (아래쪽)}.$$

비에는 동서 방향 성분이 없으므로 버스의 긴 두 옆면은 젖지 않는다.

$u = 0$인 경우. 시간 δt 동안 지붕에 닿는 빗방울은 지붕 위에 서 있는, 수직 높이가 $v\sin\theta\,\delta t$인 비스듬한 각기둥(prism) 안의 빗방울이다. 그 부피는 $ab\,v\sin\theta\,\delta t$이다. 뒷면(남쪽 면, 넓이 hb)에 닿는 빗방울은 그 뒤에 있는 수평 깊이 $v\cos\theta\,\delta t$인 각기둥을 채운다. 북쪽을 향한 앞면은 비를 맞지 않는다. 따라서 비율은 다음과 같다.

$$nb\,(h\,v\cos\theta + a\,v\sin\theta).$$

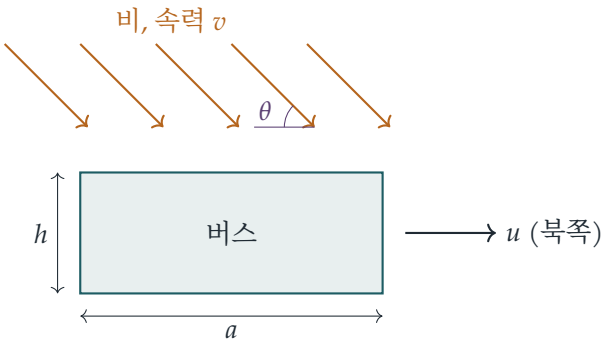
$u > 0$인 경우. 일정한 속도로 움직이는 버스의 기준틀에서 비의 속도는 다음과 같다.

$$(v\cos\theta - u) \text{ 북쪽}, \qquad v\sin\theta \text{ 아래쪽}.$$

이 기준틀에서 버스는 정지해 있으므로, 위의 논증에서 $v\cos\theta$를 $v\cos\theta - u$로 바꾸면 그대로 적용된다. 수직 성분은 변하지 않으므로 지붕은 여전히 비율 $nab\,v\sin\theta$로 비를 받는다. $v\cos\theta > u$이면 비가 여전히 버스를 따라잡아 비율 $nhb\,(v\cos\theta - u)$로 뒷면에 닿는다. $v\cos\theta < u$이면 버스가 비 속으로 달려 들어가므로, 이제 비는 비율 $nhb\,(u - v\cos\theta)$로 앞면에 닿는다. 어느 경우든 전체 비율은

$$nb\left(h\,|v\cos\theta - u| + a\,v\sin\theta\right),$$

이고, 이는 요구한 대로 $h|v\cos\theta - u| + av\sin\theta$에 비례한다.



속력 정하기

이동 거리를 D라 하자. 걸리는 시간은 D/u이므로, 받는 비의 총량은 다음에 비례한다.

$$R(u) = \frac{D}{u}\left(h|v\cos\theta - u| + av\sin\theta\right), \qquad 0 < u \le w.$$

$c = v\cos\theta$라 쓰고 절댓값을 없애자.

$u \le c$이면:

$$R(u) = D\left(\frac{hv\cos\theta + av\sin\theta}{u} - h\right).$$

분자가 양수이므로 R는 $0 < u \le c$에서 순감소(strictly decreasing)한다.

$u \ge c$이면:

$$R(u) = D\left(h + \frac{v\,(a\sin\theta - h\cos\theta)}{u}\right).$$

이것이 증가하는지 감소하는지는 오직 $a\sin\theta - h\cos\theta$의 부호에 달려 있다.

? **생각해 보기** 왜 더 빨리 가는 것이 항상 더 좋은 것은 아닐까?

더 빨리 가면 이동 시간이 짧아지므로 지붕에는 항상 도움이 된다. 지붕이 받는 몫은 $Dav\sin\theta/u$이다. 그러나 $u > c$가 되면 버스가 비 속으로 달려 들어가고, 앞면이 받는 몫 $Dh(u-c)/u$는 u와 함께 커진다. 어느 효과가 이기는지는 $a\sin\theta - h\cos\theta$의 부호가 알려준다.

두 식은 $u = c$에서 일치하므로 R는 연속(continuous)이다. 이제 다음을 얻는다.

- $w < v\cos\theta$이면 허용되는 모든 속력이 $u \le c$를 만족하고, 여기서 R는 감소한다. 따라서 최선의 선택은 $u = w$이다.
- $a\sin\theta > h\cos\theta$이면 R는 $u \le c$에서 감소하고 $u \ge c$에서도 감소한다. 따라서 R는 $(0, w]$ 전체에서 감소하고, 이번에도 최선의 선택은 $u = w$이다.

이로써 첫 번째 주장이 증명된다.

$w > v\cos\theta$이고 $a\sin\theta < h\cos\theta$이면: R는 $(0, c]$에서 감소하고 $[c, w]$에서 순증가한다. 따라서 최솟값은

$$u = v\cos\theta,$$

에서 나타나며, 이는 정확히 비의 수평 속력으로 달린다는 뜻이다. 그러면 버스에 대해 비가 수직으로 떨어지므로 지붕만 젖고, 총량은 (우리 단위로) $R(c) = Da\tan\theta$이다.

$a\sin\theta = h\cos\theta$이면: $u \ge c$에서 $R(u) = Dh$이고, 이는 u에 의존하지 않는다. $w \ge v\cos\theta$이면 $v\cos\theta$와 w 사이의 어떤 속력이든 똑같이 좋다. $v\cos\theta$보다 낮은 속력은 모두 더 나쁘다. ($w < v\cos\theta$이면 첫 번째 경우가 적용되어 $u = w$이다.) 물리적으로 보면, $u = c$를 넘어서면 더 빨리 갈 때 지붕에서 줄어드는 비의 양과 앞면에서 늘어나는 비의 양이 정확히 같다. 이 조건은 $\tan\theta = h/a$라는 뜻이다. 즉 길에서 보면 비가 버스 옆면의 대각선과 평행하게 떨어진다.

돌아오는 길

이제 버스는 남쪽으로, 비를 마주하며 달린다. 북쪽을 양으로 잡은 우리 규약에서 버스의 속도는 $-u$이므로, 비의 상대 수평 속도는 $v\cos\theta + u > 0$이고 비는 항상 앞면에 닿는다. 총량은 다음에 비례한다.

$$R(u) = \frac{D}{u}\Big(h(v\cos\theta + u) + av\sin\theta\Big) = D\left(h + \frac{v\,(h\cos\theta + a\sin\theta)}{u}\right),$$

이는 u에 대해 순감소한다. 따라서 돌아오는 길에는 a, h, θ의 값과 관계없이 운전사는 가능한 한 빨리, 즉 $u = w$로 달려야 한다.

검산

- $a = 1.3$, $h = 0.8$, $v = 2$, $\theta = 0.6$, $u = 0.7$일 때 공식은 (단위 빗방울 밀도와 단위 너비당) 비율 2.229를 준다. 무작위로 배치한 빗방울이 버스의 단면을 지나가는 컴퓨터 시뮬레이션은 2.232를 주었다. $u = 0$일 때, $u > v\cos\theta$일 때, 그리고 u가 음수일 때(돌아오는 길)에도 똑같이 잘 일치했다.
- $\theta \to \frac{1}{2}\pi$(비가 수직으로 떨어지는 경우)로 하자. 그러면 $a\sin\theta > h\cos\theta$이므로 최대 속력으로 달려야 한다. 이는 타당하다. 지붕만 젖고, 비를 맞는 시간이 짧을수록 받는 비도 적기 때문이다.
- $\tan\theta = h/a$인 등호 경우에, 총량 Dh는 예측한 대로 $u = v\cos\theta$, $1.5v\cos\theta$, $3v\cos\theta$에서 모두 같다.

흔한 실수

- **총량** 대신 **비율**을 최소화하는 것. 비율에 이동 시간 D/u를 곱해야 한다.
- $u > v\cos\theta$일 때 비가 뒷면이 아니라 앞면에 닿는다는 사실을 잊는 것. 절댓값이 필요한 이유가 바로 이것이다.
- 돌아오는 길에 다시 $|v\cos\theta - u|$를 쓰는 것. 이제 상대 속력은 $v\cos\theta + u$이다.

STEP 너머

"밀도 × 넓이 × 법선 속도"라는 계산은 면을 지나는 벡터장(vector field)의 선속이다. 벡터 미적분학에서 이것은 면적분(surface integral) $\iint \rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$가 되며, 유체역학(fluid dynamics)과 전자기학(electromagnetism)에서 보존 법칙(conservation law)의 출발점이다. 버스의 기준틀로 바꾸는 것은 갈릴레이 변환(Galilean transformation)으로, 상대성 이론(relativity)의 고전적 선구이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 상대 운동과 이런 종류의 선속 논증을 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.