풀이

STEP I 2015, 문제 1

순수수학 • 곡선 그리기

> **STEP I 2015, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q1

핵심 아이디어

인수분해할 수 있는 것은 모두 인수분해한다. 이차식이 인수분해되므로 영점이 바로 나오고, 도함수(derivative) 역시 e^x에 인수분해되는 이차식을 곱한 꼴이므로 극점(turning point)도 바로 나온다. 그래프를 올바르게 그리고 나면, "곡선 $= k$"의 해의 개수를 세는 일은 수평선을 위아래로 움직이면서 곡선과 몇 번 만나는지 지켜보는 것에 지나지 않는다. 소문항 (ii)에서는 새 함수가 원래 함수에 x^2을 대입한 것임을 알아차리면 거의 모든 결과를 다시 쓸 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$f(x) = e^x(2x^2 - 5x + 2) = e^x(2x - 1)(x - 2)$라 하자.

영점과 부호. $e^x > 0$이므로 $f(x) = 0$인 것은 정확히 $x = \frac{1}{2}$ 또는 $x = 2$일 때이다. 또 f는 $x < \frac{1}{2}$와 $x > 2$에서 양수이고, $(\frac{1}{2}, 2)$에서 음수이다. 곡선은 $f(0) = 2$에서 y축과 만난다.

극점. 곱의 미분법(product rule)에 따라

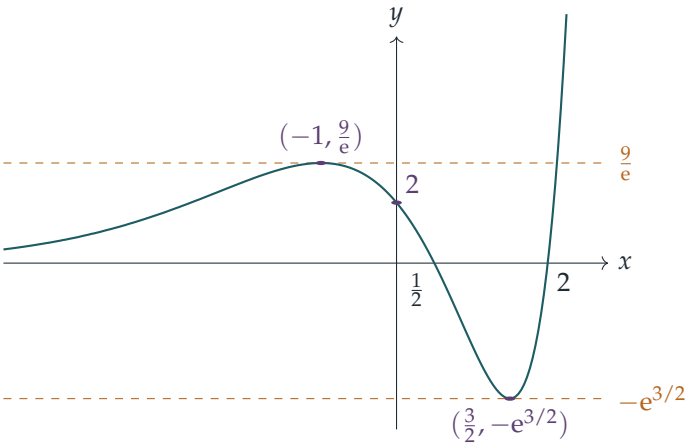
$$f'(x) = e^x(2x^2 - 5x + 2) + e^x(4x - 5) = e^x(2x^2 - x - 3) = e^x(2x - 3)(x + 1).$$

따라서 $f'(x) = 0$인 곳은 $x = -1$과 $x = \frac{3}{2}$이다. f'의 부호는 $(2x - 3)(x + 1)$의 부호와 같아서, $x < -1$에서 양수, $(-1, \frac{3}{2})$에서 음수, $x > \frac{3}{2}$에서 양수이다. 그러므로 f는 증가했다가

감소한 뒤 다시 증가하며,

$$f(-1) = \mathrm{e}^{-1}(2+5+2) = \frac{9}{\mathrm{e}} \approx 3.31 \qquad \text{(극댓값)},$$
$$f(\tfrac{3}{2}) = \mathrm{e}^{3/2}(\tfrac{9}{2} - \tfrac{15}{2} + 2) = -\mathrm{e}^{3/2} \approx -4.48 \qquad \text{(극솟값)}.$$

양 끝에서의 행동. $x \to \infty$일 때 두 인수가 모두 커지므로 $f(x) \to \infty$이다. $x \to -\infty$일 때는 주어진 사실($n = 2, 1, 0$)에 의해 $2x^2\mathrm{e}^x$, $-5x\mathrm{e}^x$, $2\mathrm{e}^x$가 각각 0으로 수렴하므로 $f(x) \to 0$이다. $x < \frac{1}{2}$에서 $f > 0$이므로 곡선은 x축의 음의 부분에 위쪽에서 다가간다. 즉 x축이 점근선(asymptote)이다.



$f(x) = k$의 해의 개수 세기. 해의 개수는 수평선 $y = k$가 곡선과 만나는 횟수이다. 곡선의 세 단조(monotonic) 구간을 차례로 살펴보면 다음과 같다.

- $(-\infty, -1]$에서 f는 순증가하며 $(0, \frac{9}{\mathrm{e}}]$의 모든 값을 정확히 한 번씩 갖는다(0에는 결코 도달하지 않는다).
- $[-1, \frac{3}{2}]$에서 f는 $\frac{9}{\mathrm{e}}$에서 $-\mathrm{e}^{3/2}$까지 순감소하며, 그 사이의 각 값을 정확히 한 번씩 갖는다.
- $[\frac{3}{2}, \infty)$에서 f는 $-\mathrm{e}^{3/2}$에서 ∞까지 순증가하며, 각 값을 정확히 한 번씩 갖는다.

각 구간의 기여를 더하면($x = -1$이나 $x = \frac{3}{2}$를 두 번 세지 않도록 주의한다) 다음을 얻는다.

$k < -e^{3/2}$	해 없음
$k = -e^{3/2}$	해 한 개 ($x = \frac{3}{2}$)
$-e^{3/2} < k \leq 0$	해 두 개
$0 < k < \frac{9}{e}$	해 세 개
$k = \frac{9}{e}$	해 두 개 ($x = -1$과 $x > 2$인 해 하나)
$k > \frac{9}{e}$	해 한 개

? **생각해 보기** $k = 0$일 때 해가 세 개가 아니라 두 개인 이유는 무엇인가?

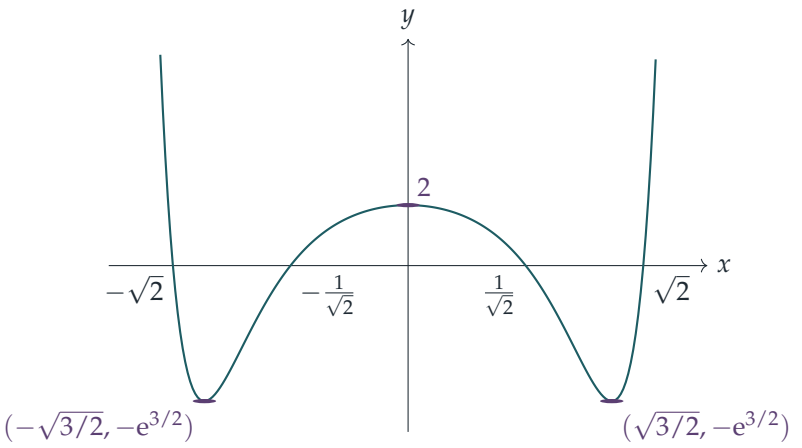
x축은 왼쪽에서 점근선이고, 모든 $x < \frac{1}{2}$에 대해 $f(x) > 0$이므로 왼쪽 끝 가지는 실제로 0에 도달하지 않는다. $f(x) = 0$의 해는 $x = \frac{1}{2}$와 $x = 2$뿐이다. 그러나 작은 $k > 0$에 대해서는 왼쪽 가지가 높이 k에 도달하므로, 해의 개수가 세 개로 늘어난다.

소문항 (ii)

$g(x) = e^{x^2}(2x^4 - 5x^2 + 2)$라 하자. 그러면 $g(x) = f(x^2)$이므로 g는 우함수(even function)이고 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. x가 $[0, \infty)$를 움직일 때 $u = x^2$은 $[0, \infty)$를 증가하면서 움직이므로, $x \geq 0$에서 g의 그래프는 f의 그래프 중 $u \geq 0$인 부분을 그대로 다시 따라간다.

- $g(0) = f(0) = 2$이다.
- 영점은 $x^2 = \frac{1}{2}$ 또는 $x^2 = 2$인 곳, 즉 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$와 $x = \pm\sqrt{2}$이다.
- 연쇄 법칙(chain rule)에 따라 $g'(x) = 2x\,f'(x^2) = 2x\,e^{x^2}(2x^2 - 3)(x^2 + 1)$이고, 이는 $x = 0$과 $x = \pm\sqrt{3/2}$에서만 0이 된다. ($x^2 = -1$은 실수해가 없으므로 $u = -1$에서의 f의 극점은 사라진다.)

$0 < x < \sqrt{3/2}$에서 $g'(x) < 0$이고, $x > \sqrt{3/2}$에서 $g'(x) > 0$이다. 따라서 $(0, 2)$는 극대점이고(대칭성에 의해 0의 바로 왼쪽에서 $g' > 0$), $x = \pm\sqrt{3/2}$는 극소점이며 그 값은 $f(\frac{3}{2}) = -e^{3/2}$이다. 마지막으로 $x \to \pm\infty$일 때 $g(x) \to \infty$이며, e^{x^2} 인수 때문에 매우 빠르게 커진다. 곡선은 "W" 모양이다.



검산

- $f(-1) = 9/e \approx 3.311$이고 $f(1.5) = -e^{1.5} \approx -4.482$이며, 근처의 몇몇 점에서 f의 값을 계산해 보면 이들이 각각 극대와 극소임을 확인할 수 있다.
- $x = 0$ 근처에서 $g(x) = f(x^2) \approx f(0) + f'(0)x^2 = 2 - 3x^2$으로 아래로 볼록한 포물선이 아닌 위로 열린 쪽이 아래를 향하는 포물선이므로, $(0, 2)$에서의 극대가 확인된다.
- 각 범위에서 k의 표본값에 대해 근의 개수를 컴퓨터로 확인하였다(예를 들어 $k = 2$이면 근이 세 개, $k = -1$이면 근이 두 개이다).
- $f(-40) \approx 1.4 \times 10^{-14}$으로, 점근선이 예측하는 대로 양수이고 매우 작다.

흔한 실수

- 곡선이 왼쪽에서 x축에 다가가기만 한다는 사실을 잊고 $k = 0$일 때 해를 세 개로 세는 것.
- 직선이 곡선에 접하여 두 해가 하나로 합쳐지는 경계의 경우 $k = \frac{9}{e}$와 $k = -e^{3/2}$를 빠뜨리는 것.
- 소문항 (ii)에서 $x^2 = -1$에 해당하는 극점을 남겨 두는 것.

STEP 너머

이 개수 세기 논증은 중간값 정리(intermediate value theorem)와 순단조성(strict monotonicity)에 기대고 있다. 구간에서 연속이고 순증가하는 함수는 양 끝값 사이의 각 값을 정확히 한 번씩 갖는다. 대학의 해석학 강의에서는 이런 사실들을, 여러분이 가정해도 좋다고

했던 극한 $x^n e^x \to 0$과 함께 엄밀하게 증명한다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 이 과정을 아주 읽기 쉽게 보여 주는 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.