풀이

STEP III 2014, 문제 9

역학 • 저항을 받는 포물체

> **STEP III 2014, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q9

핵심 아이디어

위치가 주어져 있으므로 속도(velocity)는 한 번 미분하면 얻어지고, 운동 방정식(equation of motion)을 확인하는 일은 $\mathbf{v}$와 $\dot{\mathbf{v}}$를 $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g} - k\mathbf{v}$에 대입하기만 하면 된다. 그다음부터는 모두 성분(component)의 문제이다. $\mathbf{r}$의 $\mathbf{j}$-성분이 T를 결정하고, 시각 T에서 $\mathbf{v}$의 두 성분의 비가 $\tan\beta$를 준다. 마지막 부등식은 복잡해 보이지만, $x = kT$로 놓고 분모를 없애면 정확히 힌트로 주어진 $\sinh x > x$로 정리된다.

풀이

속도 구하기와 운동 확인

물체를 입자(particle)로 모형화한다. 뉴턴(Newton)의 제2법칙(Newton's second law)에 의해 $m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{g} - mk\mathbf{v}$이므로 운동 방정식은

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{g} - k\mathbf{v},$$

이고, 초기 조건(initial conditions)은 $t = 0$일 때 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{u}$이다.

여기서 $\mathbf{g}$와 $\mathbf{u}$는 상수 벡터이므로, 주어진 $\mathbf{r}$를 계수별로 미분하면

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{k - k\mathrm{e}^{-kt}}{k^2}\,\mathbf{g} + \frac{k\mathrm{e}^{-kt}}{k}\,\mathbf{u} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-kt}}{k}\,\mathbf{g} + \mathrm{e}^{-kt}\,\mathbf{u}.$$

한 번 더 미분하면 $\dot{\mathbf{v}} = \mathrm{e}^{-kt}\mathbf{g} - k\mathrm{e}^{-kt}\mathbf{u}$이다. 한편

$$\mathbf{g} - k\mathbf{v} = \mathbf{g} - (1 - \mathrm{e}^{-kt})\mathbf{g} - k\mathrm{e}^{-kt}\mathbf{u} = \mathrm{e}^{-kt}\mathbf{g} - k\mathrm{e}^{-kt}\mathbf{u},$$

이고 이는 같은 식이므로 운동 방정식이 성립한다. $t = 0$에서 $\mathrm{e}^0 = 1$이므로 $\mathbf{r} = \frac{0-1+1}{k^2}\mathbf{g} + 0\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$이고 $\mathbf{v} = 0\,\mathbf{g} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$이다. 두 초기 조건이 모두 성립한다.

비행 시간

이제 $\mathbf{u} = u\cos\alpha\,\mathbf{i} + u\sin\alpha\,\mathbf{j}$, $\mathbf{g} = -g\,\mathbf{j}$로 놓는다. $\mathbf{r}$의 $\mathbf{j}$-성분은

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{j} = -\frac{kt - 1 + \mathrm{e}^{-kt}}{k^2}\,g + \frac{1-\mathrm{e}^{-kt}}{k}\,u\sin\alpha.$$

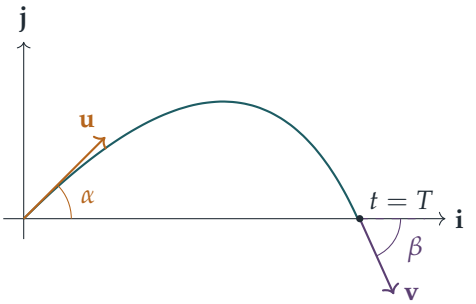
이다. $t = T$에서 이 값을 0으로 놓고 k^2을 곱하면

$$uk\sin\alpha\,(1-\mathrm{e}^{-kT}) = (kT - 1 + \mathrm{e}^{-kT})g.$$

$T > 0$이고 $k > 0$이므로 $1-\mathrm{e}^{-kT} > 0$이고, 따라서 이것으로 나눌 수 있다. $kT - 1 + \mathrm{e}^{-kT} = kT - (1-\mathrm{e}^{-kT})$로 쓰면

$$uk\sin\alpha = \left(\frac{kT}{1-\mathrm{e}^{-kT}} - 1\right)g,$$

이고, 이것이 구하려던 식이다.



시각 T에서의 각

$t = T$에서 $\mathbf{v} = \frac{1-\mathrm{e}^{-kT}}{k}\mathbf{g} + \mathrm{e}^{-kT}\mathbf{u}$의 성분은

$$v_x = \mathrm{e}^{-kT}u\cos\alpha, \qquad v_y = -\frac{1-\mathrm{e}^{-kT}}{k}\,g + \mathrm{e}^{-kT}u\sin\alpha.$$

이다. $0 < \alpha < 90°$이므로 $v_x > 0$이다. 입자가 다시 내려오는 중이므로 $v_y < 0$일 것으로 예상되며, 이는 아래에서 증명한다. 따라서 $\mathbf{v}$와 $\mathbf{i}$ 사이의 예각(acute angle)은 $\tan\beta = -v_y/v_x$를 만족한다. 전체를 v_x로 나누면

$$\tan\beta = \frac{(1-\mathrm{e}^{-kT})g}{k\,\mathrm{e}^{-kT}u\cos\alpha} - \frac{\mathrm{e}^{-kT}u\sin\alpha}{\mathrm{e}^{-kT}u\cos\alpha} = \frac{(\mathrm{e}^{kT}-1)g}{uk\cos\alpha} - \tan\alpha,$$

이다. 여기서 $(1-\mathrm{e}^{-kT})/\mathrm{e}^{-kT} = \mathrm{e}^{kT} - 1$을 이용하였다.

$\tan\beta > \tan\alpha$ 보이기

앞의 결과로부터, $uk\cos\alpha > 0$을 곱하면 $\tan\beta > \tan\alpha$는

$$\frac{(\mathrm{e}^{kT}-1)g}{uk\cos\alpha} > 2\tan\alpha \iff (\mathrm{e}^{kT}-1)g > 2uk\sin\alpha,$$

와 같다. 이제 비행 시간(time of flight)에 대한 결과를 써서 $uk\sin\alpha$를 바꾸면 u와 α가 완전히 사라진다.

생각해 보기 이것을 어떻게 $\sinh kT$가 들어간 식으로 바꿀 수 있을까?

$x = kT > 0$으로 놓는다. 그러면 $\frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}$이고, $g > 0$으로 나누면 보여야 할 부등식은

$$\mathrm{e}^x - 1 > \frac{2x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} - 2.$$

이 된다. $\mathrm{e}^x - 1 > 0$을 곱하고(따라서 부등호 방향은 유지된다) 전개하면

$$\begin{aligned}
&\iff \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1 > 2x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + 2 \\
&\iff \mathrm{e}^{2x} - 1 > 2x\mathrm{e}^x \\
&\iff \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} > 2x \qquad (\text{양변을} \mathrm{e}^x > 0\text{으로 나눔}) \\
&\iff \sinh x > x.
\end{aligned}$$

모든 단계는 역으로도 성립하고, $kT > 0$일 때 $\sinh kT > kT$이다(이 사실은 가정해도 된다). 따라서 $\tan\beta > \tan\alpha$이다.

이로써 v_y의 부호도 확정된다. $-v_y/v_x > \tan\alpha > 0$이고 $v_x > 0$임을 보였으므로 $v_y < 0$이다. 입자는 시각 T에서 실제로 내려오고 있으며, $\tan\beta$에 대한 공식이 정당화된다.

마지막으로 α와 β는 모두 $(0°, 90°)$에 속하고, 이 구간에서 tan은 순증가(strictly increasing)한다. 따라서 $\tan\beta > \tan\alpha$로부터 $\beta > \alpha$를 얻는다. 저항(resistance)이 있으면 입자는 올라갈 때보다 더 가파르게 내려온다.

검산

- $\mathrm{e}^{-kt} \approx 1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2$을 이용하면 $k \to 0$일 때 $\mathbf{r} \to \frac{1}{2}t^2\mathbf{g} + t\mathbf{u}$이다. 이는 익숙한 포물체(projectile) 운동이다. 또한 작은 x에 대하여 $\frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}} - 1 \approx \frac{x}{2}$이므로, 비행 시간 식에서 $T \to 2u\sin\alpha/g$를 얻는다. 마찬가지로 $\tan\beta \to \frac{gT}{u\cos\alpha} - \tan\alpha = \tan\alpha$이고, 이는 대칭인 포물선이다.
- $k = 1\,\mathrm{s}^{-1}$, $g = 10\,\mathrm{m\,s}^{-2}$, $u = 10\,\mathrm{m\,s}^{-1}$, $\alpha = 45°$로 놓자. $\mathbf{r}\cdot\mathbf{j} = 0$을 수치적으로 풀면 $T \approx 1.185\,\mathrm{s}$이고, 이는 저항이 없을 때의 $1.414\,\mathrm{s}$보다 짧다. 착지 각은 $\beta \approx 65.7° > 45°$이며, 두 공식 모두 소수점 아래 여러 자리까지 맞는다. 컴퓨터로 $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g} - k\mathbf{v}$를 단계별로 수치 적분(numerical integration)하면 주어진 $\mathbf{r}$와 $\mathbf{v}$가 그대로 재현된다.

흔한 실수

- 음의 부호 없이 $\tan\beta = v_y/v_x$로 놓는 것. 착지할 때 v_y는 음수이고 β는 예각이다.

- $1 - e^{-kT}$나 $e^{kT} - 1$이 양수라는 것을 밝히지 않고 이것으로 나누거나 곱하는 것. 바로 이 사실이 부등호의 방향을 지켜 준다.
- $\tan\beta > \tan\alpha$에서 멈추는 것. $\beta > \alpha$를 이끌어 내려면 예각에서 tan이 증가한다는 사실이 필요하다.

STEP 너머

주어진 $\mathbf{r}$는 선형 미분방정식(linear differential equation) $\ddot{\mathbf{r}} + k\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}$의 해이며, 이 방정식은 적분인자(integrating factor) e^{kt}를 써서 직접 풀 수 있다. 선형 저항(linear drag)은 $\mathbf{i}$-방향 운동과 $\mathbf{j}$-방향 운동이 분리되는 유일한 저항 법칙이다. 더 현실적인 이차 저항(quadratic drag) $-mk|\mathbf{v}|\mathbf{v}$에서는 두 운동이 서로 얽히고, 닫힌 형태(closed form)의 해가 존재하지 않는다. 내려올 때 더 가파른 비대칭 궤적은 두 경우 모두에서 나타난다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 저항력이 있는 운동을 이러한 관점에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.