풀이

STEP III 2014, 문제 8

순수수학 • 급수의 수렴

> **STEP III 2014, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q8

이 문제는 *Beyond STEP*의 2.3 절 **발산하는 급수와 수렴하는 그 사촌**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/kempner.html

핵심 아이디어

양의 정수를 블록(block) $[k^n, k^{n+1})$으로 잘게 나눈다. 한 블록에 속한 모든 항은 그 블록이 시작하는 곳에서의 값과 다음 블록이 시작하는 곳에서의 값 사이에 있으므로, 각 블록의 합은 항의 개수에 이 두 값을 각각 곱한 것 사이에 끼인다. 블록들을 모두 더하면 다루기 까다로운 급수(series)가 기하급수(geometric series)로, 또는 블록마다 일정한 항을 갖는 급수로 바뀌고, 그것이 발산(diverge)하는지 곧바로 알 수 있다. 숫자 2가 들어 있지 않은 정수들에 대해서도, 각 블록에 그러한 정수가 몇 개 있는지만 세면 똑같은 방법이 통한다.

풀이

블록 부등식

블록 $k^n \le r \le k^{n+1} - 1$에는

$$(k^{n+1} - 1) - k^n + 1 = k^{n+1} - k^n = k^n(k-1)$$

개의 정수가 들어 있다. f는 순감소(strictly decreasing)하므로, 블록에 속한 모든 r에 대하여

$$\mathrm{f}(k^{n+1}) < \mathrm{f}(r) \le \mathrm{f}(k^n),$$

이다. 첫 번째 부등식은 $r < k^{n+1}$이기 때문이고, 두 번째 부등식은 $r \geq k^n$이기 때문이다(등호는 $r = k^n$일 때만 성립한다). 이를 r의 $k^n(k-1)$개의 값에 대하여 모두 더하면

$$k^n(k-1)\,\mathrm{f}(k^{n+1}) \leq \sum_{r=k^n}^{k^{n+1}-1} \mathrm{f}(r) \leq k^n(k-1)\,\mathrm{f}(k^n),$$

을 얻으며, 이것이 보이려던 것이다. (사실 왼쪽 부등식은 등호 없이 성립한다.)



$k = 2$일 때의 블록들과 각 블록에 속한 항의 개수.

소문항 (i)

$k = 2, \mathrm{f}(r) = \frac{1}{r}$로 잡자. 이 함수는 순감소한다. 블록 부등식은

$$\frac{2^n}{2^{n+1}} \leq \sum_{r=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{r} \leq \frac{2^n}{2^n}, \qquad \text{즉} \qquad \tfrac{1}{2} \leq \sum_{r=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{r} \leq 1.$$

이 된다. 각 블록은 다음 블록이 시작하기 바로 앞에서 끝나므로, $n = 0, 1, \ldots, N$에 대한 블록들은 빈틈없이 이어져 정확히 $1 \leq r \leq 2^{N+1} - 1$을 덮는다. $N+1$개의 부등식을 모두 더하면

$$\frac{N+1}{2} \leq \sum_{r=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{r} \leq N+1.$$

이제 결론을 이끌어 내자. 부분합(partial sum) $H_m = \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{r}$은 m에 대하여 증가하고, $H_{2^{N+1}-1} \geq \frac{N+1}{2}$이며, 이 값은 N을 충분히 크게 잡으면 원하는 어떤 수보다도 크게 만들 수 있다. 따라서 부분합은 유계(bounded)가 아니고, $\sum \frac{1}{r}$은 수렴(converge)하지 않는다.

소문항 (ii)

$k = 2, \mathrm{f}(r) = \frac{1}{r^3}$로 잡자. 이 함수도 순감소한다. 이번에는 오른쪽 부등식만 있으면 된다.

$$\sum_{r=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{r^3} \leq \frac{2^n}{2^{3n}} = \frac{1}{4^n}.$$

앞에서처럼 $n = 0, 1, \ldots, N$에 대하여 더하면

$$\sum_{r=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{r^3} \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4^n} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

생각해 보기 이것은 부분합 가운데 일부만을 위로 누른다. 그런데 왜 무한급수의 합까지 위로 눌리는가?

모든 항이 양수이므로 부분합은 증가한다. 임의의 부분합 $\sum_{r=1}^{m} r^{-3}$은 $2^{N+1}-1 \geq m$인 부분합 이하이므로 $\frac{4}{3}$보다 작다. 위로 유계인 증가수열은 수렴하고, 그 극한은 그 상계 이하이다. 따라서

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^3} \leq \frac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3}.$$

소문항 (iii)

$S(1000)$ **세기.** 0부터 999까지의 각 정수를 앞에 0을 채워 세 자리 숫자열로 쓴다(예를 들어 7은 007이 된다). 앞에 채운 0은 결코 2를 만들지 않으므로, 정수에 2가 없는 것과 그 숫자열에 2가 없는 것은 정확히 같다. 세 자리 각각에는 $0, 1, 3, 4, \ldots, 9$의 아홉 숫자 중 어느 것이든 올 수 있으므로 숫자열은 9^3개이고, 이들은 모두 서로 다른 정수에 대응한다. 그중 하나는 000인데 이는 양수가 아니므로, $S(1000)$에는 9^3-1개의 수가 들어 있다.

블록별로 세기. 자릿수를 $n+1$개로 하여 같은 논증을 하면 $S(10^{n+1})$에 $9^{n+1}-1$개의 정수가 있음을 알 수 있다. 따라서 $(n+1)$자리 수들의 블록 $10^n \leq r \leq 10^{n+1}-1$에는

$$(9^{n+1}-1)-(9^n-1) = 8\cdot 9^n$$

개의 2가 없는 정수가 들어 있다. (같은 말이지만, 맨 앞자리는 0도 2도 될 수 없으므로 8가지, 나머지 n자리는 각각 9가지씩 선택할 수 있다.)

$\sigma(n)$**을 위로 누르기.** 이것은 $k=10$인 블록 논증인데, 다만 2가 없는 정수만 센다는 점이 다르다. 블록에 속한 모든 r에 대하여 $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{10^n}$이므로, 그 블록이 합에 기여하는 양은 많아야

$$8\cdot 9^n \cdot \frac{1}{10^n} = 8\left(\tfrac{9}{10}\right)^n.$$

이다. 이제 n을 고정하고 $n \leq 10^{M+1}$인 M을 택한다. $S(n)$의 모든 원소는 $m=0,1,\ldots,M$에 대한 블록 중 하나에 속하고, 역수들은 모두 양수이다. 따라서

$$\sigma(n) \leq \sum_{m=0}^{M} 8\left(\tfrac{9}{10}\right)^m < \sum_{m=0}^{\infty} 8\left(\tfrac{9}{10}\right)^m = \frac{8}{1-\frac{9}{10}} = 80.$$

두 번째 부등식에서 등호가 성립하지 않는 것은 $m > M$인 양의 항들을 빼놓았기 때문이다. 그러므로 모든 n에 대하여 $\sigma(n) < 80$이다.

검산

- 소문항 (ii): $\sum r^{-3} = 1.2020\ldots$(아페리 상수(Apéry's constant))이고, 이는 $1\frac{1}{3}$보다 넉넉히 작다.

- $N = 2$일 때의 소문항 (i): $\sum_{r=1}^{7} \frac{1}{r} \approx 2.593$이고, 이는 1.5와 3 사이에 있다.
- 소문항 (iii): 직접 세어 보면 1000 미만에 $728 = 9^3 - 1$개의 수가 있고 각 블록에 $8 \cdot 9^n$개가 있음이 확인된다. 컴퓨터로 직접 더하면 $\sigma(10^7) \approx 10.28$로, 80보다 훨씬 작다. 이 상계는 넉넉하지만, 문제에서 요구한 것은 이것뿐이다.

흔한 실수

- 블록의 항 개수를 잘못 세는 것. 블록은 k^n부터 $k^{n+1} - 1$까지이므로 항은 $k^{n+1} - k^n - 1$개가 아니라 $k^{n+1} - k^n$개이다.
- (iii)에서 n번째 블록에 2가 없는 숫자열 9^n개를 모두 세는 것. 맨 앞자리는 0이 될 수 없으므로 $8 \cdot 9^n$개뿐이다. 9^{n+1}을 쓰면 상계가 90이 되어 충분하지 않다.
- (ii)에서 $2^{N+1} - 1$까지의 부분합에 대한 상계를 구하는 데서 멈추고, 왜 무한급수 전체의 합이 유계인지 설명하지 않는 것.

STEP 너머

이것은 코시(Cauchy)의 응축 판정법(condensation test)이다. 감소하는 양수 수열에 대하여 $\sum a_r$은 $\sum 2^n a_{2^n}$이 수렴할 때, 그리고 그때에만 수렴한다. 이 판정법을 쓰면 $\sum r^{-p}$가 $p > 1$일 때, 그리고 그때에만 수렴한다는 것을 곧바로 알 수 있다. 소문항 (iii)은 Kempner 급수(Kempner series)이다. 발산하는 조화급수(harmonic series)에서 주어진 숫자가 들어 있는 정수를 모두 지우면 수렴하는 급수가 되는데, 큰 정수는 거의 모두 모든 숫자를 포함하고 있기 때문이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 응축 판정법과 비교 판정법(comparison test)을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.