풀이

STEP III 2014, 문제 7

순수수학 • 벡터와 원에 내접하는 사각형

STEP III 2014, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

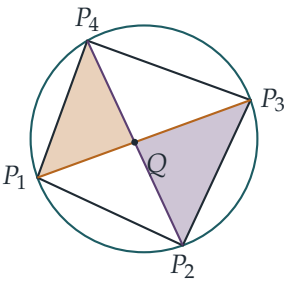
step.maths.org/questions/14-s3-q7

핵심 아이디어

(i)번은 교차하는 현의 정리(intersecting chords theorem)이며, 같은 활꼴에 대한 원주각(angles in the same segment)에서 나온다. 벡터 문항들은 같은 사실을 한 번 더 보여 준다. 평면 위의 네 점은 "아핀 종속(affinely dependent)"이고, 그 종속 관계의 계수가 두 대각선(diagonal)의 교점의 위치를 알려 주므로, 계수들이 각 대각선을 알려진 비율로 나눈다. 이 비율들을 (i)에 대입하면 마지막 관계식을 얻는다.

풀이

이 도형에 관한 두 가지 사실을 풀이 내내 사용한다. 첫째, 직선은 원과 많아야 두 점에서 만나므로 P_i 가운데 어느 세 점도 한 직선 위에 있지(collinear) 않다. 둘째, 꼭짓점들이 원을 따라 차례로 이름 붙어 있으므로 P_1과 P_3은 현(chord) P_2P_4가 잘라 내는 서로 다른 두 호(arc) 위에 있다. 따라서 두 점은 직선 P_2P_4의 서로 반대쪽에 있고, 두 대각선은 선분 P_1P_3과 P_2P_4의 내부에 엄밀히 놓인 점 Q에서 교차한다.



소문항 (i)

삼각형 P_1QP_4와 P_2QP_3에서

- $\angle P_1QP_4 = \angle P_2QP_3$이다. 두 각은 Q에서의 맞꼭지각(vertically opposite angles)이기 때문이다.
- $\angle QP_1P_4 = \angle P_3P_1P_4$이고 $\angle QP_2P_3 = \angle P_4P_2P_3$이다. 이 두 각은 모두 같은 호($P_1$과 P_2를 지나 P_4에서 P_3까지 가는 호) 위의 점 P_1, P_2에서 현 P_3P_4를 바라보는 각이므로 서로 같다.

따라서 두 삼각형은 $P_1 \leftrightarrow P_2$, $Q \leftrightarrow Q$, $P_4 \leftrightarrow P_3$의 대응으로 닮음(similar)이다. 대응하는 변의 길이는 비례하므로

$$\frac{P_1Q}{P_2Q} = \frac{QP_4}{QP_3}, \qquad \text{이므로} \qquad (P_1Q)(QP_3) = (P_2Q)(QP_4),$$

이고, 이것이 보이려던 것이다.

소문항 (ii)

원에 내접하는 사각형(cyclic quadrilateral)은 한 평면 위에 있으므로, 세 벡터 $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1$은 모두 2차원 공간 안에 있다. 2차원에서 세 벡터는 선형 종속(linearly dependent)이므로, 모두 0은 아닌 수 b_2, b_3, b_4가 존재하여

$$b_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + b_3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) + b_4(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1) = \mathbf{0}.$$

이 성립한다. (구체적으로 말하면, P_1, P_2, P_3이 한 직선 위에 있지 않으므로 $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$과 $\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$은 평행하지 않고, 따라서 이 두 벡터는 평면을 생성(span)하며 $\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1$은 이들의 일차결합이다. 이때 $b_4 = -1$로 잡을 수 있다.) 이제 $a_1 = -(b_2 + b_3 + b_4)$, 그리고 $i = 2, 3, 4$에 대하여 $a_i = b_i$로 두자. 그러면 $\sum a_i = 0$이고, a_i가 모두 0은 아니며

$$\sum_{i=1}^{4} a_i\mathbf{p}_i = a_1\mathbf{p}_1 + b_2\mathbf{p}_2 + b_3\mathbf{p}_3 + b_4\mathbf{p}_4 = b_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + b_3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) + b_4(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1) = \mathbf{0},$$

이므로 $(*)$가 성립한다.

소문항 (iii)

$a_1 + a_3 \neq 0$. 그렇지 않다고, 즉 $a_1 + a_3 = 0$이라고 가정하자. 그러면 $(*)$의 첫째 식에 의하여 $a_2 + a_4 = 0$이기도 하므로 $a_3 = -a_1$, $a_4 = -a_2$이다. 둘째 식은

$$a_1(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) + a_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4) = \mathbf{0}.$$

이 된다. 직선 P_1P_3과 P_2P_4는 서로 다르고(그렇지 않으면 네 점이 모두 한 직선 위에 있게 된다) Q에서 만나므로 평행하지 않다. 따라서 $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$과 $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4$는 영벡터가 아니고 평행하

지도 않으므로 $a_1 = a_2 = 0$일 수밖에 없다. 그러면 네 a_i가 모두 0이 되어 모순이다. 따라서 $a_1 + a_3 \neq 0$이고, 마찬가지로 $a_2 + a_4 = -(a_1 + a_3) \neq 0$이다.

교점. $(*)$로부터 $a_1\mathbf{p}_1 + a_3\mathbf{p}_3 = -(a_2\mathbf{p}_2 + a_4\mathbf{p}_4)$이고 $a_1 + a_3 = -(a_2 + a_4)$이다. 앞의 식을 뒤의 식으로 나누면

$$\mathbf{r} = \frac{a_1\mathbf{p}_1 + a_3\mathbf{p}_3}{a_1 + a_3} = \frac{a_2\mathbf{p}_2 + a_4\mathbf{p}_4}{a_2 + a_4}.$$

이다. 첫째 꼴은 $\mathbf{r} = \mathbf{p}_1 + \dfrac{a_3}{a_1 + a_3}(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)$임을 보여 주므로, 이 점은 직선 P_1P_3 위의 점이다. 같은 방법으로 둘째 꼴은 이 점이 직선 P_2P_4 위의 점임을 보여 준다. 평행하지 않은 두 직선은 오직 한 점에서만 만나므로, $\mathbf{r}$은 Q의 위치 벡터(position vector)이다.

> **?** **생각해 보기** Q에 대한 이 공식을 어떻게 길이 P_1Q와 QP_3으로 바꿀 수 있을까?

빼 보면 된다. $\mathbf{q} = \mathbf{r}$을 이용하면

$$\mathbf{q} - \mathbf{p}_1 = \frac{a_3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)}{a_1 + a_3}, \qquad \mathbf{p}_3 - \mathbf{q} = \frac{a_1(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)}{a_1 + a_3}.$$

이다. 길이를 취하면 $P_1Q = \dfrac{|a_3|}{|a_1 + a_3|}P_1P_3$, $QP_3 = \dfrac{|a_1|}{|a_1 + a_3|}P_1P_3$이다. 같은 방법으로 $\mathbf{r}$의 둘째 꼴로부터 $P_2Q = \dfrac{|a_4|}{|a_2 + a_4|}P_2P_4$, $QP_4 = \dfrac{|a_2|}{|a_2 + a_4|}P_2P_4$이다.

부호. Q는 P_1과 P_3 사이에 엄밀히 놓여 있으므로, 분수 $\frac{a_3}{a_1+a_3}$은 0과 1 사이에 엄밀히 놓인다. 그러면 $\frac{a_1}{a_1+a_3} = 1 - \frac{a_3}{a_1+a_3}$도 0과 1 사이에 엄밀히 놓인다. 두 양수의 곱은 양수이므로

$$\frac{a_1a_3}{(a_1 + a_3)^2} > 0, \qquad \text{즉, } a_1a_3 > 0.$$

이다. P_2P_4에 대하여 같은 논증을 하면 $a_2a_4 > 0$이다. 따라서 $|a_1a_3| = a_1a_3$이고 $|a_2a_4| = a_2a_4$이다.

결론 이끌어 내기. (i)에 대입하면

$$\frac{a_1a_3}{(a_1 + a_3)^2}(P_1P_3)^2 = (P_1Q)(QP_3) = (P_2Q)(QP_4) = \frac{a_2a_4}{(a_2 + a_4)^2}(P_2P_4)^2.$$

이다. $(a_2 + a_4)^2 = (a_1 + a_3)^2 \neq 0$이므로 양변에 이를 곱하면

$$a_1a_3(P_1P_3)^2 = a_2a_4(P_2P_4)^2,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

검산

- 꼭짓점이 $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$인 정사각형을 생각하자. 그러면 $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3 = \mathbf{0} = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4$이므로 $a = (1,-1,1,-1)$은 $(*)$를 만족한다. 공식에 따르면 Q는 원점이고, $a_1a_3(P_1P_3)^2 = 4 = a_2a_4(P_2P_4)^2$이다.

- 대칭이 아닌 경우로, 그림에서처럼 단위원 위에서 각 $200°, 290°, 20°, 120°$에 있는 점 $P_1, \ldots, P_4$를 잡자. $a_1a_3 > 0$과 $a_2a_4 > 0$을 포함한 (iii)의 세 주장이 모두, 이 경우와 수천 개의 무작위 원에 내접하는 사각형에 대하여 컴퓨터로 10^{-10} 이내의 오차로 확인되었다.
- 모든 a_i에 같은 인수 λ를 곱해도 답은 그대로 유지되며, 마땅히 그래야 한다. 마지막 관계식의 양변이 모두 λ^2배가 되기 때문이다.

흔한 실수

- (i)에서 엉뚱한 각끼리 짝짓는 것. P_1과 P_2에서의 같은 두 각은 현 P_3P_4 위에 서 있으며, 이것이 어느 변끼리 대응하는지를 정해 준다.
- (iii)에서 아무 설명 없이 절댓값 기호를 떼어 버리는 것. 절댓값이 붙은 관계식은 쉽다. 정작 해야 할 일은 $a_1a_3 > 0$과 $a_2a_4 > 0$을 보이는 것이며, 여기에는 Q가 두 대각선의 내부에 있다는 사실이 쓰인다.
- $a_1 + a_3 \neq 0$을 증명할 때 두 대각선이 왜 평행하지 않은지를 잊는 것.

STEP 너머

양 $(P_1Q)(QP_3)$은 원에 대한 점 Q의 **방멱**(power)이며, Q를 지나는 모든 현에 대하여 같다. (ii)번은 평면 위의 네 점이 아핀 종속이라는 명제이다. 수 a_i는 무게중심 좌표(barycentric coordinates)와 비슷한 좌표이고, Q에 대한 공식은 아핀 기하(affine geometry)가 좌표 없이 점, 직선, 비율을 어떻게 다루는지를 처음으로 엿보게 해 준다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 선형 종속과 (ii)의 바탕에 있는 차원(dimension) 세기를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.