풀이

STEP III 2014, 문제 6

순수수학 • 볼록성을 이용한 부등식

STEP III 2014, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s3-q6

핵심 아이디어

값이 0에서 출발하고 기울기(slope)도 0에서 출발하며 그래프가 위로 휘어지는 함수는 0보다 커질 수밖에 없다. 주어진 사실을 두 번 적분하면 이 그림이 그대로 증명(proof)이 된다. 그러면 문제의 각 부등식(inequality)은 모든 항을 한쪽으로 옮겨 $f(0) = f'(0) = 0$인 함수 f를 만들고, f''이 양수임을 확인하는 문제가 된다. 진짜 일은 f''이 간단하게 나오도록 알맞은 꼴을 고르는 것이다.

풀이

첫 번째 결과

$0 < t < x_0$에서 $f''(t) > 0$이고 $f(0) = f'(0) = 0$이라고 하자. $0 < x < x_0$인 x를 하나 고정한다.

$h = f''$으로 두자. $0 < t < x$에서 $f''(t) > 0$이므로, 주어진 결과에 의해

$$f'(x) = f'(x) - f'(0) = \int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

이것은 $(0, x_0)$의 모든 x에 대해 성립하므로 $0 < t < x_0$에서 $f'(t) > 0$이다.

이제 이번에는 $h = f'$으로 두고 주어진 결과를 다시 적용한다. $0 < x < x_0$이면 $0 < t < x$에서 $f'(t) > 0$이므로

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

따라서 요구한 대로 $0 < t < x_0$에서 $f(t) > 0$이다. 앞으로는 줄곧 $x_0 = \frac{1}{2}\pi$로 두고 이 결과를 쓴다.

소문항 (i)

$f(x) = 1 - \cos x \cosh x$라 하자. 그러면 $f(0) = 1 - 1 = 0$이고, 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$f'(x) = \sin x \cosh x - \cos x \sinh x, \qquad f'(0) = 0 - 0 = 0.$$

한 번 더 미분하면

$$\begin{aligned} f''(x) &= (\cos x \cosh x + \sin x \sinh x) - (-\sin x \sinh x + \cos x \cosh x) \\ &= 2 \sin x \sinh x. \end{aligned}$$

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 $\sin x > 0$이고 $\sinh x > 0$이므로 $f''(x) > 0$이다. 첫 번째 결과에 의해 $f(x) > 0$, 즉

$$\cos x \cosh x < 1 \qquad \text{단, } 0 < x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

소문항 (ii)

> **생각해 보기** 첫 번째 결과를 어떤 함수에 적용해야 할까? $\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{\cosh x}$를 그대로 쓰면 복잡해 보인다.

먼저 분수를 없앤다. $0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서는 x, $\sin x$, $\sinh x$, $\cosh x$가 모두 양수이므로, 양수를 곱해도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다. 그러면

$$\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x} \iff x < \sin x \cosh x, \qquad \frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x} \iff \sin x \sinh x < x^2.$$

(첫 번째 식에는 $x \cosh x > 0$을, 두 번째 식에는 $x \sinh x > 0$을 곱한다.) 곱 $\sin x \cosh x$와 $\sin x \sinh x$는 깔끔하게 미분되므로 이 꼴이 알맞은 꼴이다.

왼쪽 부등식. $g(x) = \sin x \cosh x - x$라 하자. 그러면 $g(0) = 0$이고

$$g'(x) = \cos x \cosh x + \sin x \sinh x - 1, \qquad g'(0) = 1 + 0 - 1 = 0.$$

한 번 더 미분하면 $\sin x \cosh x$ 항들이 소거된다.

$$\begin{aligned} g''(x) &= (-\sin x \cosh x + \cos x \sinh x) + (\cos x \sinh x + \sin x \cosh x) \\ &= 2 \cos x \sinh x, \end{aligned}$$

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서는 $\cos x > 0$이고 $\sinh x > 0$이므로 이 값은 양수이다. (상한 $\frac{1}{2}\pi$가 중요한 곳이 바로 여기이다.) 첫 번째 결과에 의해 $g(x) > 0$이므로 $x < \sin x \cosh x$이고, 따라서 $\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x}$이다.

오른쪽 부등식. $k(x) = x^2 - \sin x \sinh x$라 하자. 그러면 $k(0) = 0$이고

$$k'(x) = 2x - \cos x \sinh x - \sin x \cosh x, \qquad k'(0) = 0.$$

한 번 더 미분하면 $\sin x \sinh x$ 항들이 소거된다.

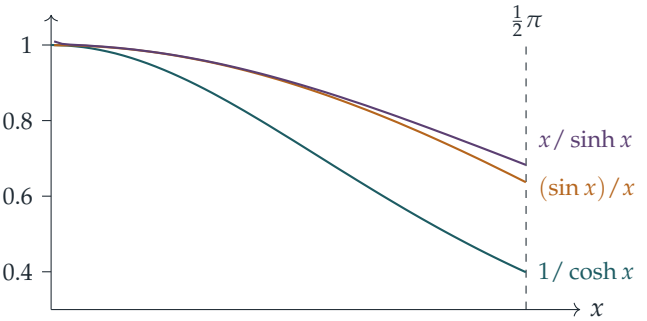
$$\begin{aligned} k''(x) &= 2 - (-\sin x \sinh x + \cos x \cosh x) - (\cos x \cosh x + \sin x \sinh x) \\ &= 2 - 2\cos x \cosh x. \end{aligned}$$

소문항 (i)에 의해 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 $\cos x \cosh x < 1$이므로 그 범위에서 $k''(x) > 0$이다. 첫 번째 결과에 의해 $k(x) > 0$이므로 $\sin x \sinh x < x^2$이고, 따라서 $\frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x}$이다.

두 결과를 합치면 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서

$$\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x},$$

이 되어 요구한 결과가 성립한다.



검산

- 급수 전개(series): $\cos x \cosh x = 1 - \frac{1}{6}x^4 + \cdots$이므로 작은 x에서 실제로 1보다 살짝 작아지며, 이는 (i)과 일치한다. 마찬가지로 $\frac{1}{\cosh x} \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$, $\frac{\sin x}{x} \approx 1 - \frac{1}{6}x^2$, $\frac{x}{\sinh x} \approx 1 - \frac{1}{6}x^2$이므로, 작은 x에서 왼쪽 부등식은 분명하고 오른쪽 부등식은 그다음 항들이 결정한다(x^4의 계수는 $\frac{\sin x}{x}$에서 $\frac{1}{120}$, $\frac{x}{\sinh x}$에서 그보다 큰 $\frac{7}{360}$이다).
- $x = 1$에서: $\cos 1 \cosh 1 \approx 0.834 < 1$이고, $\frac{1}{\cosh 1} \approx 0.648 < \sin 1 \approx 0.841 < \frac{1}{\sinh 1} \approx 0.851$이다.
- $x = \frac{1}{2}\pi$ 근처인 $x = 1.57$에서: 세 값은 각각 약 0.399, 0.637, 0.683이고, $\cos x \cosh x \approx 0.002$이다.

흔한 실수

- 첫 번째 결과를 $\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{\cosh x}$ 자체에 적용하는 것: 이 함수는 0에서 정의조차 되지 않고, 도함수도 다루기 불편하다. 먼저 분모를 없애되, 곱하는 모든 인수가 양수인지 확인한다.

- $f(0) = 0$뿐 아니라 $f'(0) = 0$도 확인해야 한다는 것을 잊는 것: 이것이 없으면 첫 번째 결과를 적용할 수 없다.
- 두 번째 부등식에 소문항 (i)이 필요하다는 것을 알아차리지 못하는 것: $k'' = 2 - 2\cos x \cosh x$가 양수인 이유가 바로 (i)이다.

STEP 너머

첫 번째 결과는 평균값 정리(mean value theorem)를 이용한 논증의 한 형태로, 도함수가 양수인 함수는 증가한다는 사실을 두 번 적용한 것이다. 이 결과는 볼록함수(convex function)가 접선(tangent line), 여기서는 원점에서의 접선 $y = 0$보다 위에 있다는 것을 말해 주며, 이런 "이계도함수(second derivative) 비교" 기법은 초등함수 사이의 부등식을 증명하는 표준적인 방법이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 평균값 정리와 그 결과들을 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.