풀이

STEP III 2014, 문제 5

순수수학 • 기하에서의 복소수

> **STEP III 2014, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q5

핵심 아이디어

복소평면(complex plane)에서 "평행하고 길이가 같다"는 것은 곧 "변위 벡터(displacement vector)로서 같다"는 뜻이고, 반시계 방향으로 직각만큼 회전하는 것은 i를 곱하는 것이다. 따라서 이 문제의 모든 기하학적 조건은 꼭짓점에 대한 짧은 일차방정식이 된다. 변 위에 세운 정사각형의 중심은 변의 중점까지 간 다음, 그 변에 수직인 방향으로 변 길이의 절반만큼 바깥쪽으로 나아가서 찾는다.

풀이

평행사변형 판정 조건

먼저 $a+c=b+d$라고 가정하자. 그러면

$$b-a=c-d \qquad \text{그리고} \qquad d-a=c-b,$$

이므로 변위 $\overrightarrow{AB}$는 $\overrightarrow{DC}$와 같고 $\overrightarrow{AD}$는 $\overrightarrow{BC}$와 같다. 같은 변위는 평행하고 길이가 같으므로, 두 쌍의 대변이 모두 평행하고 길이가 같다. 즉 $ABCD$는 평행사변형(parallelogram)이다.

역으로 $ABCD$가 평행사변형이라고 가정하자. 평행하고 길이가 같은 두 선분의 변위는 서로 같거나 부호가 반대이므로

$$b-a=\varepsilon(c-d), \qquad d-a=\eta(c-b), \qquad \varepsilon,\eta\in\{1,-1\}.$$

$\varepsilon=1$이거나 $\eta=1$이면, 어느 식이든 정리하면 $a+c=b+d$가 된다. 나머지 경우는 $\varepsilon=\eta=-1$, 즉 $b-a=d-c$이고 $d-a=b-c$인 경우뿐이다. 첫째 식에서 둘째 식을 빼면 $b-d=d-b$이므로 $b=d$인데, 이는 꼭짓점이 서로 다르므로 불가능하다. 따라서 $a+c=b+d$이고, 동치가 증명되었다.

정사각형 판정 조건

$ABCD$가 평행사변형이라 하고, 두 대각선(diagonal)의 공통 중점(즉 평행사변형의 중심)을 $m = \frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}(b+d)$라 하자. 그러면

$$a-m = \tfrac{1}{2}(a-c), \qquad b-m = \tfrac{1}{2}(b-d), \qquad c-m = -(a-m), \qquad d-m = -(b-m).$$

$ABCD$가 **정사각형**(*square*)**이면**, 두 대각선은 길이가 같고 서로를 수직이등분하므로, B는 A를 m을 중심으로 직각만큼 회전하여 얻어진다. 꼭짓점에 반시계 방향으로 이름을 붙였으므로 이 회전은 반시계 방향이다. 따라서 $b-m = \mathrm{i}(a-m)$이고, 이는 $\frac{1}{2}(b-d) = \frac{1}{2}\mathrm{i}(a-c)$, 즉 $\mathrm{i}(a-c) = b-d$이다.

역으로, $\mathrm{i}(a-c) = b-d$이면 $w = a-m \neq 0$이라 하자. 그러면

$$a-m = w, \quad b-m = \mathrm{i}w, \quad c-m = -w, \quad d-m = -\mathrm{i}w,$$

이므로 네 꼭짓점은 w를 m을 중심으로 차례로 90°씩 회전한 것이다. 이들은 정사각형의 꼭짓점이다(네 변의 길이가 모두 $|w|\sqrt{2}$이고, 각 변은 앞의 변에 i를 곱한 것이다). 이로써 두 번째 동치가 증명되었다.

소문항 (i)

꼭짓점 P, Q, R, S는 반시계 방향으로 놓여 있으므로, P에서 Q로 걸어갈 때 $PQRS$의 내부는 왼쪽에 있다. 따라서 PQ 위에 바깥쪽으로 세운 정사각형은 오른쪽에 있다.

중심 X는 PQ의 중점 $\frac{1}{2}(p+q)$에서 PQ에 수직인 방향으로 오른쪽으로 $\frac{1}{2}|q-p|$(변 길이의 절반)만큼 이동하여 도달한다. $q-p$에 $-\mathrm{i}$를 곱하면 시계 방향으로, 즉 오른쪽으로 90° 회전하므로, 이 이동은 $-\frac{1}{2}\mathrm{i}(q-p)$이다. 따라서

$$x = \tfrac{1}{2}(p+q) - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}(q-p) = \tfrac{1}{2}(p(1+\mathrm{i}) + q(1-\mathrm{i})),$$

이고, 이것이 구하려던 식이다.

> ? **생각해 보기** 왜 $+\mathrm{i}$가 아니라 $-\mathrm{i}$인가?

$+\mathrm{i}$를 곱하면 $\overrightarrow{PQ}$가 왼쪽으로 회전하여 사각형 안쪽을 향하게 되므로, 안쪽에 세운 정사각형의 중심을 얻게 된다. 모든 내각이 180°보다 작으므로 내부는 각 변의 왼쪽에 완전히 놓이고, 따라서 오른쪽은 확실히 바깥쪽이다.

소문항 (ii)

소문항 (i)을 각 변에 차례로 적용하면(모든 변을 내부가 왼쪽에 오도록 지나가므로 같은 논리가 모든 변에 성립한다)

$$2x = p(1+\mathrm{i}) + q(1-\mathrm{i}), \qquad 2y = q(1+\mathrm{i}) + r(1-\mathrm{i}),$$
$$2z = r(1+\mathrm{i}) + s(1-\mathrm{i}), \qquad 2t = s(1+\mathrm{i}) + p(1-\mathrm{i}).$$

판정 조건에 나오는 두 식을 비교해 보자.

마주 보는 꼭짓점의 합.

$$\begin{aligned} 2(x+z) - 2(y+t) &= (p+r)(1+\mathrm{i}) + (q+s)(1-\mathrm{i}) - (q+s)(1+\mathrm{i}) - (p+r)(1-\mathrm{i}) \\ &= 2\mathrm{i}\,(p+r-q-s), \end{aligned}$$

이므로

$$x + z - (y+t) = \mathrm{i}(p+r-(q+s)). \tag{1}$$

대각선.

$$2\mathrm{i}(x-z) = \mathrm{i}(p-r)(1+\mathrm{i}) + \mathrm{i}(q-s)(1-\mathrm{i}) = (p-r)(\mathrm{i}-1) + (q-s)(1+\mathrm{i}),$$
$$2(y-t) = (q-s)(1+\mathrm{i}) + (r-p)(1-\mathrm{i}) = (q-s)(1+\mathrm{i}) + (p-r)(\mathrm{i}-1).$$

두 식이 똑같으므로, 이러한 **모든** 사각형 $PQRS$에 대하여

$$\mathrm{i}(x-z) = y - t \tag{2}$$

가 성립한다. 즉 선분 XZ와 YT는 항상 길이가 같고 서로 수직이다.

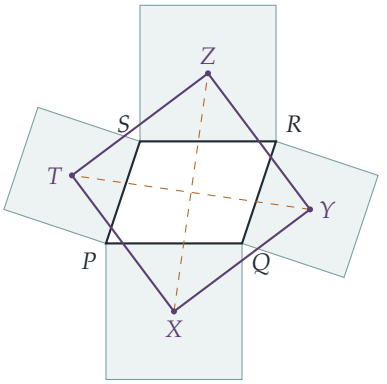
> **생각해 보기** (2)가 항상 성립한다면, $XYZT$가 정사각형인지 아닌지는 무엇이 결정하는가?

평행사변형 조건뿐이다. 이제 조각들을 맞추어 보자.

$PQRS$**가 평행사변형이면**, $p+r = q+s$이므로 (1)에 의해 $x+z = y+t$이고, 첫 번째 결과에 의해 $XYZT$는 평행사변형이다. 여기에 (2)를 더하면, 정사각형 판정 조건에 의해 $XYZT$는 정사각형이다. (그 판정 조건의 역 방향은 꼭짓점 이름 붙이는 방향에 대한 가정이 필요 없다. 또 $X \neq Z$인데, $x = z$이면 $r - p = \mathrm{i}(s-q)$가 되어 $\overrightarrow{PR}$가 $\overrightarrow{QS}$를 **반시계 방향**으로 직각만큼 회전한 것이 되기 때문이다. 그러나 반시계 방향으로 이름 붙인 볼록 사각형(convex quadrilateral)에서 $\overrightarrow{PR}$는 항상 $\overrightarrow{QS}$를 **시계 방향**으로 $0°$와 $180°$ 사이의 각만큼 회전하고 길이를 조정한 것이다.)

$XYZT$**가 정사각형이면**, 특히 평행사변형이므로 첫 번째 결과에 의해 $x+z = y+t$이다. (1)에 의해 $\mathrm{i}(p+r-q-s) = 0$이므로 $p+r = q+s$이고, $PQRS$는 평행사변형이다.

따라서 $XYZT$가 정사각형일 필요충분조건(if and only if)은 $PQRS$가 평행사변형인 것이다.



검산

평행사변형 $p = 0$, $q = 4$, $r = 5 + 3\mathrm{i}$, $s = 1 + 3\mathrm{i}$(위 그림)를 생각하자. 공식에 의해 $x = 2 - 2\mathrm{i}$, $y = 6 + \mathrm{i}$, $z = 3 + 5\mathrm{i}$, $t = -1 + 2\mathrm{i}$이다. $XYZT$의 변은 $4 + 3\mathrm{i}$, $-3 + 4\mathrm{i}$, $-4 - 3\mathrm{i}$, $3 - 4\mathrm{i}$이고, 각각 앞의 변에 i를 곱한 것이므로 한 변의 길이가 5인 정사각형이다. 소문항 (i)의 검산으로, $x = 2 - 2\mathrm{i}$는 실제로 PQ 아래에 있는 꼭짓점 0, 4, $4 - 4\mathrm{i}$, $-4\mathrm{i}$인 정사각형의 중심이다. 무작위로 만든 수천 개의 볼록 사각형에 대해 컴퓨터로 확인한 결과, 항등식 (2)는 매번 성립했고 $XYZT$는 $PQRS$가 평행사변형일 때에만 정확히 정사각형이었다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $+\mathrm{i}$를 사용하여 정사각형을 사각형 안쪽에 놓는 것.
- 평행사변형 판정 조건에서 "평행하고 길이가 같다"는 조건이 $b - a = -(c - d)$도 허용하므로 이 경우를 배제해야 한다는 것을 잊는 것.
- "필요충분조건"의 한 방향만 증명하는 것. 소문항 (ii)에서 "정사각형 $\Rightarrow$ 평행사변형" 방향은 (1)만 있으면 된다.

STEP 너머

항등식 (2)는 반 오벨 정리(van Aubel's theorem)이다. 임의의 사각형에서 마주 보는 바깥쪽 정사각형의 중심을 잇는 두 선분은 길이가 같고 서로 수직이다. 이는 일반적인 원리의 작은 예이다. 회전과 중점으로 이루어진 기하학적 작도는 꼭짓점에 대한 선형 사상(linear map)이므로, 그에 관한 정리는 대수적 항등식으로 환원된다(정삼각형에 관한 나폴레옹 정

리(Napoleon's theorem)도 또 하나의 예이다). Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 곱셈에 대한 이러한 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.