풀이

STEP III 2014, 문제 4

순수수학 • 적분 부등식

> **STEP III 2014, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q4

이 문제는 *Beyond STEP*의 4.7 절 **변분법**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/variations.html

핵심 아이디어

I_1의 제곱을 전개하여 I와 비교한다. 그 차이는 완전도함수(exact derivative) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2\tan x\right)$의 적분이다. $y(1) = 0$이고 $\tan 0 = 0$이므로 이 적분은 0이 된다. I를 제곱의 적분으로 쓰고 나면 I가 음이 아니라는 것은 분명하다. (ii)에서도 같은 방법이 통하는데, 이를 위해서는 $\sec^2$ 항이 정확히 a^2y^2을 만들어 내도록 b를 골라야 한다. 이때 문제가 될 수 있는 것은 $\tan bx$가 $[0,1]$ 안에서 발산하는 경우뿐이다.

풀이

문제의 의도대로, 처음부터 끝까지 y는 $[0,1]$에서 연속인 도함수를 가진다고 가정한다.

소문항 (i)

$0 \le x \le 1 < \frac{\pi}{2}$이므로 함수 $\tan x$는 $[0,1]$에서 연속이고, 따라서 I_1은 잘 정의된다. 제곱을 전개하면

$$I_1 = \int_0^1 \left((y')^2 + 2yy'\tan x + y^2\tan^2 x\right)\mathrm{d}x,$$

이므로, $1+\tan^2 x = \sec^2 x$를 이용하면

$$\begin{aligned} I - I_1 &= -\int_0^1 \left(y^2 + 2yy'\tan x + y^2\tan^2 x\right)\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \left(2yy'\tan x + y^2\sec^2 x\right)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

이다. 곱의 미분법(product rule)에 의해 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2\tan x\right) = 2yy'\tan x + y^2\sec^2 x$이고, 이것은 정확히 피적분함수(integrand)이다. 따라서

$$I - I_1 = -\Big[y^2\tan x\Big]_0^1 = -\left(y(1)^2\tan 1 - y(0)^2\tan 0\right) = 0,$$

이다. $y(1) = 0$이고 $\tan 0 = 0$이기 때문이다. 그러므로 요구한 대로 $I = I_1$이다.

I_1은 길이가 양수인 구간에서 제곱을 적분한 것이므로 $I_1 \geq 0$이고, 따라서 $I \geq 0$이다.

이제 $I = 0$이라고 하자. 그러면 $I_1 = 0$이고, 피적분함수 $(y' + y\tan x)^2$은 연속이며 음이 아니므로 $[0,1]$의 모든 점에서 0이어야 한다(어느 한 점에서 양수라면 그 근처의 작은 구간에서도 양수가 되어 적분이 양수가 된다). 따라서 $0 \leq x \leq 1$에서 $y' + y\tan x = 0$이다.

> **생각해 보기** 어딘가에서 0이 될 수도 있는 y로 나누지 않고 $y' + y\tan x = 0$을 어떻게 풀 수 있을까?

적분인자(integrating factor)를 이용한다. $[0,1]$에서 $\cos x > 0$이므로

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{\cos x}\right) = \frac{y'\cos x + y\sin x}{\cos^2 x} = \frac{y' + y\tan x}{\cos x} = 0,$$

이고, 따라서 어떤 상수 C에 대하여 $y = C\cos x$이다. 조건 $y(1) = 0$에서 $C\cos 1 = 0$이고, $\cos 1 \neq 0$이므로 $C = 0$이다. 그러므로 $I = 0$이 되는 것은 $[0,1]$의 모든 x에 대하여 $y = 0$일 때뿐이다.

소문항 (ii)

$K = \int_0^1 (y' + ay\tan bx)^2\,\mathrm{d}x$라 하고, $b > 0$은 나중에 정하기로 한다. 전개하면

$$K = \int_0^1 \left((y')^2 + 2ayy'\tan bx + a^2y^2\tan^2 bx\right)\mathrm{d}x.$$

이다. 나타나기를 기대하는 도함수는

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ay^2\tan bx\right) = 2ayy'\tan bx + aby^2\sec^2 bx = 2ayy'\tan bx + aby^2 + aby^2\tan^2 bx.$$

이다. 이것을 K의 피적분함수와 비교하면, $\tan^2$ 항은 $ab = a^2$, 곧 $b = a$일 때 정확히 일치한다. 이렇게 고르면

$$(y' + ay\tan ax)^2 = (y')^2 - a^2y^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ay^2\tan ax\right),$$

이고, 따라서 $y(1) = 0$이고 $\tan 0 = 0$이므로

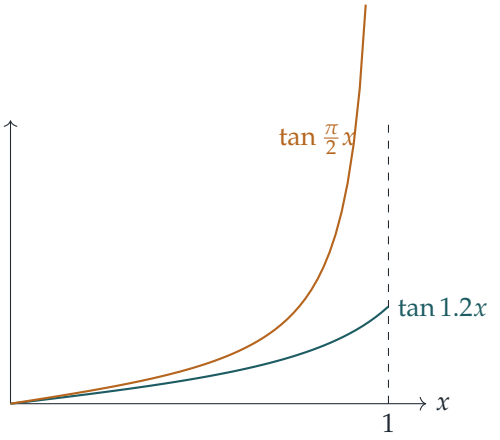
$$K = J + \left[ay^2 \tan ax\right]_0^1 = J + a\,y(1)^2 \tan a = J,$$

이다.

이 논증이 성립하려면 K가 존재하고 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)를 적용할 수 있도록 $\tan ax$가 $[0,1]$ 전체에서 정의되고 연속이어야 한다. $a > 0$이므로 ax는 $[0,a]$ 위를 움직이고, tan가 그곳에서 연속인 것은 정확히 $a < \frac{\pi}{2}$일 때이다. 따라서 이 증명은

$$a < k = \frac{\pi}{2}.$$

에 대하여 성립한다. 이러한 a에 대하여 K는 제곱의 적분이므로 $J = K \geq 0$이다. (사실 (i)의 논증에서 $\cos x$ 대신 $\cos ax$를 쓰면, $J = 0$일 경우 $C\cos a = 0$인 $y = C\cos ax$가 되어야 하므로 $y \equiv 0$임을 알 수 있다. 즉 y가 항등적으로 0이 아니면 $J > 0$까지 얻는다.)



그림은 왜 $k = \frac{\pi}{2}$인지 보여 준다. $a < \frac{\pi}{2}$이면 가중치 $\tan ax$는 $[0,1]$에서 유계이지만, $a = \frac{\pi}{2}$이면 끝점 $x = 1$에서 점근선(asymptote)을 가진다.

$a = \frac{\pi}{2}$인 경우

증명이 어디를 살펴봐야 할지 알려 준다. $K = 0$이 되려면 $y' + ay\tan ax = 0$이어야 하고, 그 해는 $y = C\cos ax$이다. $a < \frac{\pi}{2}$이면 이 해들은 조건 $y(1) = 0$을 만족하지 못하지만, $a = \frac{\pi}{2}$이면 만족한다. 그래서

$$y = \cos\tfrac{\pi x}{2}, \qquad y' = -\tfrac{\pi}{2}\sin\tfrac{\pi x}{2},$$

로 놓아 본다. 이 함수는 모든 곳에서 0인 것은 아니며 $y(1) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$이다. 그러면

$$J = \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \left(\sin^2\tfrac{\pi x}{2} - \cos^2\tfrac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \cos\pi x\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\pi^2}{4}\Big[\frac{\sin\pi x}{\pi}\Big]_0^1 = 0.$$

이다. 따라서 $a = k$일 때 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$(또는 그것의 0이 아닌 상수배)는 $J = 0$을 준다.

검산

- (i)에서 $y = 1 - x$로 놓으면 $I = \int_0^1 (1-(1-x)^2)\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > 0$이고, I_1을 수치적으로 계산해도 0.6667이 나온다.
- $(1-x)$에 임의의 삼차식을 곱한 여러 함수와 $(0, \frac{\pi}{2})$의 임의의 a에 대하여, 컴퓨터로 확인한 결과 높은 정확도로 $J = K > 0$이었다.
- 경계 $k = \frac{\pi}{2}$는 최선이다. $y = \cos\frac{\pi x}{2}$로 놓으면 $J = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - a^2\right)$이고, 이는 모든 $a > \frac{\pi}{2}$에 대하여 음수이다(예를 들어 $a = 2$이면 $J \approx -0.766$).

흔한 실수

- $x = 0$에서의 경계항(boundary term)이 0이 되는 것은 $y(0)$에 대한 어떤 조건 때문이 아니라 $\tan 0 = 0$이기 때문이라는 점을 잊는 것. $y(0)$에 대해서는 아무것도 가정하지 않는다.
- 이유를 밝히지 않고 $I_1 = 0$에서 $y' + y\tan x = 0$을 결론짓는 것. 중요한 것은 피적분함수의 연속성이다.
- $\tan bx$가 $[0,1]$에서 유한한지 확인하지 않고 b를 고르는 것. 조건 $a < \frac{\pi}{2}$는 바로 여기에서 나온다.

STEP 너머

$y(1) = 0$일 때의 부등식 $\int_0^1 (y')^2\,\mathrm{d}x \geq \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}x$는 비르팅거(Wirtinger) 부등식(또는 푸앵카레(Poincaré) 부등식)의 한 형태이며, 상수 $\frac{\pi^2}{4}$는 $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$인 $-y'' = \lambda y$의 가장 작은 고윳값(eigenvalue)이다. 극값을 주는 함수 $\cos\frac{\pi x}{2}$는 그 고유함수(eigenfunction)이다. 변분법(calculus of variations)에서, 잘 고른 도함수를 이용하여 완전제곱식을 만드는(completing the square) 방법은 정상 경로(stationary path)가 실제로 최솟값인지 판정하는 르장드르(Legendre) 판정법과 야코비(Jacobi) 판정법의 바탕이 되는 아이디어이다. 이런 성격의 문제를 더 보려면 Siklos, *Advanced Problems in*

Mathematics(수학 심화 문제)를, 그 밑바탕에 있는 고윳값 문제에 대해서는 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.