풀이

STEP III 2014, 문제 3

순수수학 • 포물선까지의 거리

> **STEP III 2014, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q3

핵심 아이디어

포물선(parabola) 위의 모든 점은 $(at^2, 2at)$ 꼴로 쓸 수 있으므로, 우리가 구해야 하는 거리는 모두 하나의 변수 t의 함수가 된다. 두 소문항 모두에서 그 함수는 이차식(quadratic)이 된다(직선의 경우에는 t에 대한 이차식이고, 점의 경우에는 t^2에 대한 이차식이다). 이차식의 최솟값은 완전제곱식 만들기(completing the square)로 구하면 된다. 다만 변수가 가질 수 있는 범위에 주의해야 한다. t^2은 음수가 될 수 없고, 바로 이 제약 때문에 소문항 (ii)가 여러 경우로 나뉜다. 원의 경우는 덤으로 얻어진다. 한 점에서 원까지의 거리는 그 점에서 중심까지의 거리에서 반지름을 뺀 값이기 때문이다.

풀이

소문항 (i)

L을 $mx - y + c = 0$으로 쓰자. 포물선 위의 점 $P = (at^2, 2at)$에서 L까지의 수선의 길이(perpendicular distance)는 다음과 같다.

$$\frac{|mat^2 - 2at + c|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

$f(t) = mat^2 - 2at + c$라 하자. $ma > 0$이므로 완전제곱식으로 만들면

$$f(t) = ma\left(t - \frac{1}{m}\right)^2 + c - \frac{a}{m} = ma\left(t - \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{mc - a}{m},$$

이므로, f는 최솟값 $\dfrac{mc - a}{m}$을 가지며 이 값은 $t = 1/m$에서 얻어진다.

경우 $mc > a$. 이때 모든 t에 대해 $f(t) \geq \frac{mc-a}{m} > 0$이므로, 포물선 전체가 L의 한쪽에 놓이고 이 직선과 결코 만나지 않는다. L과 포물선 사이의 최단 거리는 포물선 위의 점에서 L까

지의 거리의 최솟값, 즉 $|f(t)|/\sqrt{m^2+1} = f(t)/\sqrt{m^2+1}$의 최솟값이며, 이는

$$\frac{mc-a}{m\sqrt{m^2+1}},$$

으로 구하려던 값이다. 가장 가까운 점은 $t = 1/m$이며, 여기서 포물선의 접선의 기울기는 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 1/t = m$이다. 즉 접선이 L과 평행하며, 이는 기하학적 직관과 일치한다.

경우 $mc \le a$**.** 이제 $f(1/m) \le 0$인 반면, $t \to \infty$일 때 $f(t) \to +\infty$이다. f는 연속(continuous)이므로 어떤 t에서 $f(t) = 0$이고, 따라서 L은 포물선과 만나며 최단 거리는 0이다.

소문항 (ii): 점 $(p, 0)$

$C = (p, 0)$에서 $P = (at^2, 2at)$까지의 거리의 제곱은 다음과 같다.

$$(at^2 - p)^2 + 4a^2t^2.$$

이 값은 $u = t^2$에만 의존하며, u는 $[0, \infty)$의 모든 값을 취한다. 따라서 다음을 최소화하면 된다.

$$g(u) = (au - p)^2 + 4a^2u = a^2u^2 - 2a(p-2a)u + p^2 \qquad (u \ge 0).$$

완전제곱식으로 만들면

$$g(u) = a^2\Big(u - \frac{p-2a}{a}\Big)^2 + p^2 - (p-2a)^2 = a^2\Big(u - \frac{p-2a}{a}\Big)^2 + 4a(p-a).$$

생각해 보기 범위의 제약이 없다면 g의 최솟값은 $u = (p-2a)/a$에서 나타난다. 이 값을 항상 취할 수 있는가?

그렇지 않다. $u = t^2$은 음이 아니어야 하고, $(p-2a)/a \ge 0$은 $p \ge 2a$일 때만 성립한다.

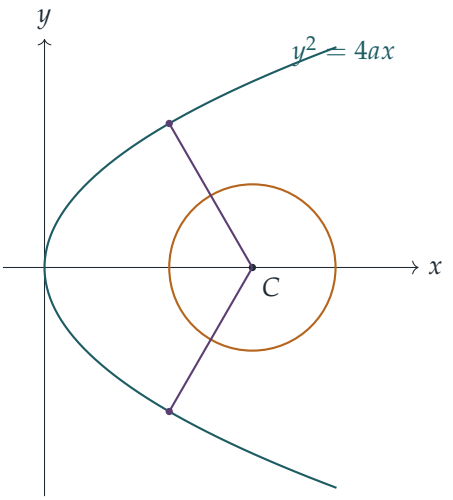
경우 $p/a > 2$**.** 꼭짓점 $u = p/a - 2$가 양수이므로 허용되는 값이고, g의 최솟값은 $4a(p-a)$이다. $p > 2a > a$이므로 이 값은 양수이다. 최단 거리는

$$2\sqrt{a(p-a)},$$

이고, 두 점 $(p-2a,\ \pm 2\sqrt{a(p-2a)})$에서 얻어진다.

경우 $p/a \le 2$**.** 꼭짓점이 $u \le 0$에 있으므로 g는 $u \ge 0$에서 증가하고, 그 범위에서의 최솟값은 $g(0) = p^2$이다. 최단 거리는 p이며, 포물선의 꼭짓점 $(0, 0)$에서 얻어진다.

두 답은 $p = 2a$에서 일치하며, 둘 다 $2a$를 준다.



그림은 $a = 1$, $p = 5$인 경우이다. C에 가장 가까운 포물선 위의 점들(보라색)은 거리 $2\sqrt{1 \cdot 4} = 4$만큼 떨어져 있고, C를 중심으로 하는 반지름 $b = 2$인 원(호박색)은 포물선과 거리 2만큼 떨어져 있다.

소문항 (ii): 원

d를 방금 구한 $C = (p, 0)$에서 포물선까지의 거리라 하자. 즉

$$d = \begin{cases} p & \text{단, } p \leq 2a, \\ 2\sqrt{a(p-a)} & \text{단, } p > 2a. \end{cases}$$

원은 중심이 C이고 반지름이 b이다.

$d > b$인 경우. 포물선 위의 임의의 점 P와 원 위의 임의의 점 Q를 잡자. 삼각부등식(triangle inequality)에 의해

$$|PQ| \geq |PC| - |CQ| = |PC| - b \geq d - b > 0.$$

등호는 P가 C에 가장 가까운 포물선 위의 점이고 Q가 선분 CP와 원의 교점일 때 성립한다($|CP| = d > b$이므로 선분은 실제로 원과 만난다). 따라서 최단 거리는 $d - b$이다.

$d \leq b$인 경우. P가 포물선을 따라 움직일 때 $|PC|$는 최솟값 $d \leq b$에서부터 얼마든지 큰 값까지 연속적으로 변하므로, 어딘가에서 $|PC| = b$가 된다. 그 점은 두 곡선 위에 모두 있으므로 최단 거리는 0이다.

이를 종합하면, 원과 포물선 사이의 최단 거리는 다음과 같다.

$$\begin{cases} p-b & \text{단, } p \le 2a\text{이고} b < p, \\ 2\sqrt{a(p-a)}-b & \text{단, } p > 2a\text{이고} b < 2\sqrt{a(p-a)}, \\ 0 & \text{그 외의 경우(즉, } b \ge d\text{일 때).} \end{cases}$$

검산

- $m=1, c=2, a=1$로 두면 $mc=2>a$이다. 공식은 $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071$을 준다. 직접 계산하면 점 $t=1$은 $(1,2)$이고, 이 점에서 $x-y+2=0$까지의 거리는 $|1-2+2|/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$이다. 대신 $c=\frac{1}{2}$로 두면($mc<a$), 직선 $y=x+\frac{1}{2}$는 $y^2=4x$와 $x^2-3x+\frac{1}{4}=0$을 만족하는 곳에서 만나는데, 이 방정식은 실근을 가지므로 거리가 0임이 확인된다.
- $a=1, p=5$일 때 점 $(3, \pm 2\sqrt{3})$은 $(5,0)$에서 거리 $\sqrt{4+12}=4=2\sqrt{1\cdot 4}$만큼 떨어져 있으며, 컴퓨터로 포물선 위를 탐색해도 더 가까운 점은 찾지 못했다.
- $p \to 0$일 때 거리 $p \to 0$인데, $(0,0)$이 포물선 위에 있으므로 옳은 결과이다. p가 클 때는 $2\sqrt{a(p-a)} < p$인데, 꼭짓점까지의 거리가 p이므로 당연히 그래야 한다.
- 모든 결과는 m, c, a, p, b를 무작위로 수백 번 골라 컴퓨터로 탐색하여 확인하였다.

흔한 실수

- 거리의 제곱을 t에 대해 미분한 도함수(derivative)를 0으로 놓고 근 $t=0$을 빠뜨리거나, $p<2a$일 때 $t^2=p/a-2$가 해를 갖지 않는다는 것을 잊는 실수. 경우 나누기가 바로 소문항 (ii)의 핵심이다.
- $mc<a$일 때 $(mc-a)/(m\sqrt{m^2+1})$을 답으로 내는 실수. 이 값은 음수이며, 실제로는 직선이 포물선을 가로지른다.
- 원에 대해 부호를 확인하지 않고 $d-b$라고 쓰는 실수. $b \ge d$이면 두 곡선이 만나므로 답은 0이다.

STEP 너머

소문항 (ii)에서 가장 가까운 점은 CP가 포물선에 수직인 곳, 즉 법선(normal) 방향인 곳이며, $p=2a$에서 경우가 바뀌는 것은 우연이 아니다. $(2a,0)$은 포물선의 꼭짓점에서의 곡률 중심(centre of curvature)이다. 그보다 더 먼 점들은 축 밖에 가장 가까운 점을 두 개 가지며, 이런 전환점들의 자취인 축폐선(evolute)은 곡선의 미분기하학(differential

geometry)에서 고전적인 대상이다. 제한된 범위에서 함수를 최소화하는 문제, 즉 답이 정류점(stationary point)이 아니라 경계에 있을 수도 있는 문제는 제약 최적화(constrained optimisation)의 출발점이다. 이런 정신의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.