풀이

STEP III 2014, 문제 2

순수수학 • 쌍곡선 함수 적분법

STEP III 2014, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s3-q2

핵심 아이디어

두 피적분함수(integrand) 모두 분모에 $\cosh 2x$가 있고, 배각 공식(double-angle formula)은 $\cosh^2 x$로도, $\sinh^2 x$로도 나타낼 수 있다. 분자에 맞는 형태를 고르면 각 적분은 표준적인 유리함수 적분이 된다. 마지막 소문항에서는 지수함수로 되돌아가는 것이 요령이다. $u = \mathrm{e}^x$로 놓으면 두 피적분함수는 모두 분모에 $1 + u^4$가 있는 u의 유리함수(rational function)가 되고, 이들을 적절히 조합하면 정확히 $1/(1+u^4)$를 얻는다.

풀이

소문항 (i)

$\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$을 이용한다. $u = \cosh x$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}u = \sinh x \,\mathrm{d}x$이므로

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{2u^2 - 1}.$$

분모는 $(\sqrt{2}u - 1)(\sqrt{2}u + 1)$로 인수분해되고, 두 인수의 차는 2이므로

$$\frac{1}{2u^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}u - 1} - \frac{1}{\sqrt{2}u + 1}\right).$$

각 항을 적분하면 로그가 되며, u의 계수 때문에 $\frac{1}{\sqrt{2}}$라는 인수가 붙는다.

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}u}{2u^2-1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\ln|\sqrt{2}u - 1| - \ln|\sqrt{2}u + 1|\Big) + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}\cosh x - 1}{\sqrt{2}\cosh x + 1}\right| + C,\end{aligned}$$

이것이 구하는 결과이다. (사실 $\cosh x \geq 1$이므로 $\sqrt{2}\cosh x - 1 > 0$이고, 따라서 실수 x에 대해서는 절댓값 기호가 필요 없다.)

소문항 (ii)

이번에는 분자가 $\cosh x$이고, 이는 $\sinh x$의 도함수이므로 비슷한 치환 $u = \sinh x$, $\mathrm{d}u = \cosh x\,\mathrm{d}x$를 쓴다. $\cosh 2x = 1 + 2\sinh^2 x$로 쓰면

$$\begin{aligned}\int \frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}u}{1+2u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\,u) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sinh x) + C,\end{aligned}$$

여기서 $a = \sqrt{2}$로 하여 $\int \mathrm{d}u/(1+a^2u^2) = \frac{1}{a}\arctan(au)$를 이용하였다.

소문항 (iii)

언뜻 보면 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}$에는 cosh가 어디에도 없다.

> **생각해 보기** 모든 것을 $u = \mathrm{e}^x$로 나타내면 $\cosh x / \cosh 2x$는 어떤 모양이 될까?

$\cosh x = \frac{1}{2}(u + u^{-1})$이고 $\cosh 2x = \frac{1}{2}(u^2 + u^{-2})$이므로, 분자와 분모에 u^2을 곱하면

$$\frac{\cosh x}{\cosh 2x} = \frac{u + u^{-1}}{u^2 + u^{-2}} = \frac{u(u^2+1)}{u^4+1}, \qquad \frac{\sinh x}{\cosh 2x} = \frac{u(u^2-1)}{u^4+1}.$$

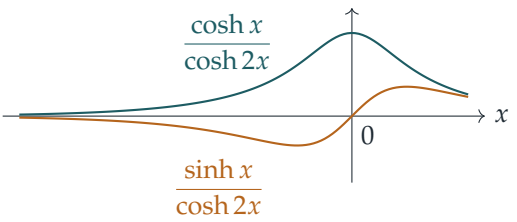
또한 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$이므로 남는 인수 u가 약분된다.

$$\frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1+u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u, \qquad \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{u^2-1}{1+u^4}\,\mathrm{d}u.$$

첫째 식에서 둘째 식을 빼면 $\dfrac{2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u$가 남는다. 끝으로, u가 0에서 1까지 변하면 $x = \ln u$는 $-\infty$에서 0까지 변한다. 따라서

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x.$$

$x \to -\infty$일 때 각 피적분함수가 $O(\mathrm{e}^x)$이므로 우변의 두 적분은 모두 수렴(converge)한다. (좌변은 보통의 적분이므로, 이것은 사실 변수를 바꾼 것일 뿐이며 무한대인 끝점은 $u \to 0$에서 나온다.)



cosh **적분.** 소문항 (ii)에 의해, $x \to -\infty$일 때 $\sinh x \to -\infty$이므로 $\arctan(\sqrt{2}\sinh x) \to -\frac{\pi}{2}$이다. 그러므로

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan 0 - \left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

sinh **적분.** 소문항 (i)에 의해, $x \to -\infty$일 때 $\cosh x \to \infty$이므로 로그 안의 분수는 1로, 로그는 0으로 수렴한다. $x = 0$에서는 $\cosh 0 = 1$이므로

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$$

분모를 유리화(rationalising)하면 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2$이고, $\sqrt{2}-1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$이므로

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1).$$

이 값은 마땅히 음수이다. $x < 0$이면 $\sinh x < 0$이기 때문이다(호박색 곡선 참고).

종합하기.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)\right) = \frac{\pi + 2\ln(\sqrt{2}+1)}{4\sqrt{2}},$$

이것이 구하는 결과이다.

검산

- (i)과 (ii)의 답을 미분하여 피적분함수가 다시 나오는지 확인한다. (ii)의 경우 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sinh x) = \dfrac{\cosh x}{1+2\sinh^2 x}$이다.
- 최종 값은 ≈ 0.86697이고, 이는 $\int_0^1 \mathrm{d}u/(1+u^4)$를 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산한 값과 일치한다. 이 값은 $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$(더 작은 함수 $1/(1+u^2)$의 적분)와 1 사이에 있으므로 타당하다.
- 별도로, 두 무한 적분의 값도 수치적으로 확인하였다. $\pi/(2\sqrt{2}) \approx 1.1107$이고 $-\ln(1+\sqrt{2})/\sqrt{2} \approx -0.6232$이다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서도 $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$을 쓰는 것. $u = \sinh x$로 치환할 때는 $\sinh^2$ 형태인 $1 + 2\sinh^2 x$가 필요하다.

- $u = \mathrm{e}^x$일 때 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$임을 잊는 것. 분자에 남는 u를 약분해 주는 것이 바로 이 인수이다.
- 적분 구간을 잘못 잡는 것. $u \in [0,1]$에 대응하는 것은 $[0,1]$이 아니라 $x \in (-\infty, 0]$이다.

STEP 너머

$1+u^4 = (u^2+\sqrt{2}u+1)(u^2-\sqrt{2}u+1)$이므로 같은 적분을 부분분수(partial fractions)로 직접 계산할 수도 있다. $\frac{1+u^2}{1+u^4}$와 $\frac{1-u^2}{1+u^4}$를 조합하는 방법은 그 복잡한 계산 대부분을 피하는 깔끔한 지름길이다. 대학에서는 $\int_0^\infty \mathrm{d}u/(1+u^4) = \pi/(2\sqrt{2})$ 같은 적분을 경로 적분(contour integration)과 유수 정리(residue theorem)를 써서 한 줄로 계산하며, 이상적분(improper integral)은 해석학(analysis)에서 완전히 엄밀하게 다룬다. 복소해석적인 측면을 살펴보기에는 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석)가 아주 훌륭한 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.