풀이

STEP III 2014, 문제 11

역학 • 원운동

STEP III 2014, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s3-q11

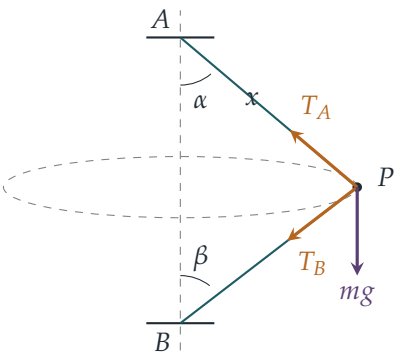
핵심 아이디어

입자에는 세 힘(두 장력(tension)과 무게)이 작용하고, 이 힘들이 합쳐져 원운동에 필요한 구심력(centripetal force)을 정확히 공급해야 한다. 연직 방향과 수평 방향으로 힘을 분해하면 두 장력에 대한 두 개의 일차방정식을 얻는다. 줄은 당기기만 할 수 있으므로 $T_B \geq 0$이고, 이로부터 부등식이 나온다. 경계인 경우에는 아래쪽 줄이 느슨해지며, 삼각형 ABP에 코사인 법칙(cosine rule)을 적용하면 어떤 각 α가 가능한지 알 수 있다.

풀이

상황 설정

P를 입자로, 줄을 가볍고 늘어나지 않는 것으로 모형화한다. P는 직선 AB 위에 중심이 있고 반지름이 $r = x\sin\alpha$인 수평 원을 따라 움직이므로, 그 가속도는 축을 향하는 수평 방향으로 $\omega^2 x\sin\alpha$이다. 장력 T_A는 PA 방향으로 작용하며 위쪽 연직 방향과 각 α를 이룬다. 장력 T_B는 PB 방향으로 작용하며 아래쪽 연직 방향과 각 β를 이룬다.



장력 구하기

연직 방향(연직 가속도는 없다)과 축을 향하는 수평 방향으로 힘을 분해하면 다음과 같다.

$$T_A \cos\alpha - T_B \cos\beta = mg, \tag{1}$$

$$T_A \sin\alpha + T_B \sin\beta = m\omega^2 x \sin\alpha. \tag{2}$$

이 방정식들은 β가 둔각일 때, 즉 P가 B보다 아래에 있을 때에도 성립한다. 그 경우 $\cos\beta < 0$이므로 T_B의 연직 성분이 마땅히 그래야 하듯 위쪽을 향하기 때문이다.

T_B를 소거하려면 (1)에 $\sin\beta$를, (2)에 $\cos\beta$를 곱하여 더한다. $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$를 이용하면

$$T_A = \frac{m\left(g\sin\beta + \omega^2 x \sin\alpha\cos\beta\right)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

T_A를 소거하려면 (2)에 $\cos\alpha$를, (1)에 $\sin\alpha$를 곱하여 뺀다.

$$T_B = \frac{m\sin\alpha\left(\omega^2 x\cos\alpha - g\right)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

여기서 α와 β는 삼각형 ABP의 두 각이므로 $0 < \alpha+\beta < \pi$이고 $\sin(\alpha+\beta) > 0$이다. 또 $\sin\alpha > 0$이다. 팽팽한 줄에서는 $T_B \geq 0$이므로

$$\omega^2 x\cos\alpha \geq g,$$

이고, 이것이 보이려던 것이다.

$\omega^2 x\cos\alpha = g$인 경우

이제 $T_B = 0$이다. 즉 아래쪽 줄은 겨우 팽팽할 뿐 장력은 걸리지 않는다. 그러면 식 (1)에서

$$T_A = \frac{mg}{\cos\alpha},$$

를 얻고, 이 경우 $T_A = m\omega^2 x$이므로 (2)와도 일치한다. 또 $\cos\alpha = g/(\omega^2 x) > 0$이므로 α는 예각임에 주목하자.

생각해 보기 h, d, α만을 포함하는 부등식은 어디에서 나오는가?

이 부등식은 역학이 아니라 기하에서 나온다. 삼각형 ABP의 꼭짓점 A에서 코사인 법칙을 적용하면

$$d^2 = h^2 + x^2 - 2hx\cos\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - (2h\cos\alpha)\,x + (h^2 - d^2) = 0.$$

길이 x는 이 이차방정식의 실근이므로 판별식(discriminant)은 음이 아니다.

$$4h^2\cos^2\alpha - 4(h^2 - d^2) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad h^2\cos^2\alpha \geq h^2 - d^2.$$

$h\cos\alpha$와 $\sqrt{h^2 - d^2}$는 모두 양수이므로(α가 예각이고 $h > d$이므로) 양변의 제곱근을 취하여

$$h\cos\alpha \geq \sqrt{h^2 - d^2}.$$

를 얻는다.

T_A의 범위

입자는 실제로 축 위에 있지 않으므로 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$이고 $0 < \cos\alpha < 1$이다. 따라서 $T_A = mg/\cos\alpha > mg$이다. 다른 쪽 한계는 앞의 결과에서 $\cos\alpha \geq \sqrt{h^2 - d^2}/h$이므로

$$mg < T_A = \frac{mg}{\cos\alpha} \leq \frac{mgh}{\sqrt{h^2 - d^2}}.$$

상한에 도달하는 경우

등호가 성립하려면 $h\cos\alpha = \sqrt{h^2 - d^2}$이어야 하므로 판별식이 0이고, 이차방정식은 중근(repeated root)

$$x = h\cos\alpha = \sqrt{h^2 - d^2}.$$

을 갖는다. 그러면 $x^2 + d^2 = h^2$, 즉 $AP^2 + BP^2 = AB^2$이다. 피타고라스(Pythagoras) 정리의 역(converse)에 의해 각 APB는 직각이다. 즉 두 줄은 수직이고, P는 AB를 지름으로 하는 원 위에 있다. 이는 AP가 B를 중심으로 하는 반지름 d인 원의 접선(tangent)이라는 것과 같고, 바로 이 때문에 여기서 α가 가능한 가장 큰 값이 된다. 이 위치에서 $\sin\alpha = d/h$이고, P는 B보다 d^2/h만큼 높은 곳에 있다. 부등식이 허용하는 다른 예각 α에 대해서는 가능한 삼각형이 두 개(즉 x의 값이 두 개) 있으며, 이 두 삼각형이 이 위치에서 하나로 합쳐진다.

검산

- ω가 매우 크면 $T_B \approx m\omega^2 x\sin\alpha/\sin(\alpha+\beta)$는 ω^2에 비례하여 커진다. 이때는 두 줄이 모두 큰 구심력을 공급해야 하기 때문이다.

- 극단적인 위치에서 $h = 3, d = 2$로 두자. 그러면 $\cos\alpha = \sqrt{5}/3$, $x = \sqrt{5}$이고 $x^2 + d^2 = 5 + 4 = 9 = h^2$이다. 이때 $T_A/(mg) = 3/\sqrt{5} \approx 1.342$이며, 이는 $h/\sqrt{h^2 - d^2}$과 같다.
- T_A와 T_B의 공식을 벡터 운동 방정식에 다시 대입하여 여러 무작위 배치에 대해 컴퓨터로 확인하면 잔차가 0이 된다.

흔한 실수

- 원의 반지름을 $x\sin\alpha$가 아니라 x로 잡는 것.
- T_B의 연직 방향을 반대로 잡는 것. β를 BA로부터 잴 때, (β가 예각이면) 줄 PB는 P를 아래쪽으로 당긴다.
- 양변이 양수인지 확인하지 않고 부등식의 양변을 제곱하거나 제곱근을 취하는 것.

STEP 너머

경계인 경우 $T_B = 0$은 제약 조건이 **비활성**(*inactive*)이 되는 상황이다. 줄은 한쪽 방향으로만 작용하는 제약 조건(당길 수는 있지만 밀 수는 없다)이다. 이처럼 부등식 제약 조건이 있는 문제는 역학과 최적화에서 부호 조건이 붙은 라그랑주(Lagrange) 승수(Lagrange multipliers)로 이어진다. 원뿔 진자(conical pendulum)와 그 변형들은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에 잘 다루어져 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.