풀이

STEP III 2014, 문제 10

역학 • 연성 진동

> **STEP III 2014, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q10

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.2 절 **기준 진동**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/normal-modes.html

핵심 아이디어

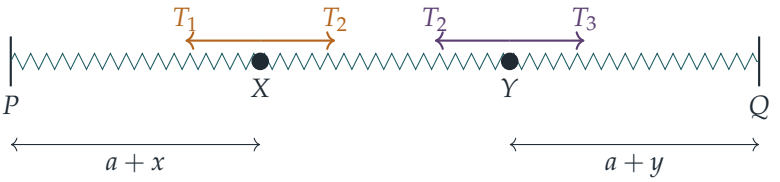
모든 것을 하나의 좌표를 갖는 한 직선 위에 놓고, 각 용수철의 늘어난 길이(extension)를 x와 y로 나타내면 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)으로부터 서로 얽힌 두 방정식, 즉 연립 방정식(coupled equations)을 얻는다. 이런 대칭성을 가진 연립 방정식은 두 식을 더하고 빼면 분리된다. $x-y$와 $x+y$는 각각 진동수가 서로 다른 자신만의 단진동(simple harmonic motion) 방정식을 따른다. 그러면 Y가 언젠가 제자리로 돌아오는지는 두 진동수의 비가 유리수(rational)인지에 달려 있다.

풀이

운동 방정식

X와 Y를 입자로, 용수철을 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 가벼운 용수철로 모형화한다. 탁자는 매끄러우므로 수평 방향의 힘은 용수철의 장력(tension)뿐이다. 모든 힘은 직선 PQ를 따라 작용하므로 운동은 이 직선 위에서만 일어난다.

위치를 P에서부터 Q 방향으로 직선을 따라 재면 P는 0에, Q는 $3a$에 있다. 그러면 X는 $a+x$에, Y는 $3a-(a+y)=2a-y$에 있다.



세 용수철의 길이와 장력은 다음과 같다(훅의 법칙에 따라 장력 $= \lambda \times$ extension$/a$이고, 음수이면 미는 힘, 즉 압축력(thrust)을 뜻한다).

$$PX:\ \text{길이} a+x, \qquad T_1 = \frac{\lambda x}{a},$$

$$XY:\ \text{길이} (2a-y)-(a+x) = a-x-y, \qquad T_2 = -\frac{\lambda(x+y)}{a},$$

$$YQ:\ \text{길이} a+y, \qquad T_3 = \frac{\lambda y}{a}.$$

장력을 받는 용수철은 양 끝을 서로를 향해 당긴다. 따라서 X는 P 쪽으로 T_1을, Y 쪽으로 T_2를 받는다. $P \to Q$ 방향을 양의 방향으로 잡으면

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -T_1 + T_2 = -\frac{\lambda}{a}x - \frac{\lambda}{a}(x+y) = -\frac{\lambda}{a}(2x+y),$$

이고, 이것이 구하려던 식이다. (부호는 저절로 맞춰진다. $T_2 < 0$이면 용수철 XY가 압축되어 X를 P 쪽으로 민다.)

Y의 위치는 $2a-y$이므로 양의 방향으로의 가속도는 $-\ddot{y}$이다. Y는 X 쪽(음의 방향)으로 T_2를, Q 쪽(양의 방향)으로 T_3을 받는다.

$$-m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -T_2 + T_3 = \frac{\lambda}{a}(x+y) + \frac{\lambda}{a}y, \qquad \text{따라서} \qquad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\lambda}{a}(x+2y).$$

이것은 첫 번째 식에서 x와 y를 맞바꾼 것으로, 장치의 대칭성(PQ의 중점에 대한 반사)으로 보아 당연히 그래야 한다.

결합 $x-y$

두 식을 빼면

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x-y) = -\frac{\lambda}{a}\left[(2x+y)-(x+2y)\right] = -\frac{\lambda}{a}(x-y).$$

$\omega^2 = \lambda/(ma)$로 놓으면 이 식은 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x-y) = -\omega^2(x-y)$, 곧 단진동이므로

$$x-y = A\cos\omega t + B\sin\omega t.$$

처음에 $XP = a$이고 $YQ = \frac{1}{2}a$이므로 $t=0$에서 $x=0, y=-\frac{1}{2}a$이다. 따라서 $x-y = \frac{1}{2}a$이고, $A = \frac{1}{2}a$이다. 입자들은 정지 상태에서 놓이므로 $t=0$에서 $\dot{x} = \dot{y} = 0$이다. 미분하면 $\omega B = 0$이므로 $B = 0$이다. 그러므로

$$x-y = \tfrac{1}{2}a\cos\omega t.$$

결합 $x+y$

이번에는 두 식을 더하면

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x+y) = -\frac{\lambda}{a}(3x+3y), \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x+y) = -3\omega^2(x+y).$$

이것은 각진동수(angular frequency)가 $\sqrt{3}\,\omega$인 단진동이므로 $x+y = C\cos\sqrt{3}\,\omega t + D\sin\sqrt{3}\,\omega t$이다. $t=0$에서 $x+y=-\frac{1}{2}a$이고 그 도함수는 0이므로 $C=-\frac{1}{2}a$, $D=0$이다.

$$x+y = -\tfrac{1}{2}a\cos\sqrt{3}\,\omega t.$$

Y는 결코 돌아오지 않는다

두 결과의 차를 반으로 나누면

$$y = \tfrac{1}{2}\big[(x+y)-(x-y)\big] = -\tfrac{1}{4}a\big(\cos\omega t + \cos\sqrt{3}\,\omega t\big).$$

(마찬가지로 $x = \frac{1}{4}a(\cos\omega t - \cos\sqrt{3}\,\omega t)$이다.) Y가 처음 위치로 돌아오는 것은 정확히 $y=-\frac{1}{2}a$일 때, 즉

$$\cos\omega t + \cos\sqrt{3}\,\omega t = 2.$$

일 때이다.

? **생각해 보기** 두 코사인 모두 주기함수이니, 언젠가는 다시 맞아떨어지지 않을까?

각 코사인은 많아야 1이므로, 합이 2가 되려면 어떤 같은 시각 $t>0$에서 둘 다 1이어야 한다. 이를 위해서는 정수 n, k에 대하여

$$\omega t = 2\pi n \quad \text{이고} \quad \sqrt{3}\,\omega t = 2\pi k$$

이어야 하며, $t>0$이므로 $n \geq 1$이다. 나누면 $\sqrt{3} = k/n$이 유리수가 되는데, 그렇지 않다. 따라서 그러한 $t>0$은 존재하지 않으며, Y는 결코 처음 위치로 돌아오지 않는다. 두 주기 $2\pi/\omega$와 $2\pi/(\sqrt{3}\,\omega)$는 통약 불가능(incommensurable)하므로, 두 진동은 얼마든지 가까이 맞아떨어질 수는 있지만 결코 다시 정확히 발맞추지 않는다.

검산

- $t=0$에서 공식은 $x=\frac{1}{4}a(1-1)=0$, $y=-\frac{1}{4}a(1+1)=-\frac{1}{2}a$를 주어 처음 위치와 일치하고, 이때 두 도함수 모두 0이 된다.
- 용수철 XY의 길이는 $a-x-y = a+\frac{1}{2}a\cos\sqrt{3}\,\omega t$이고, 이는 $\frac{1}{2}a$와 $\frac{3}{2}a$ 사이에 머무르므로 두 입자는 결코 충돌하지 않는다. 마찬가지로 $PX = a+x \geq \frac{1}{2}a$이고 $YQ = a+y \geq \frac{1}{2}a$이다. 모형은 처음부터 끝까지 물리적으로 타당하다.

- $m = a = 1, \lambda = 2$로 두고 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산하면 $t = 20$까지 x와 y의 공식을 10^{-10}보다 작은 오차로 재현한다. $0 < \omega t \leq 20\,000$ 범위를 컴퓨터로 탐색하면 $\cos \omega t + \cos \sqrt{3}\,\omega t$는 2에 1.999995까지 가까워지지만, 결코 2에 이르지는 않는다.

흔한 실수

- Y에 대한 식의 부호를 틀리는 것: y는 Q에서부터 재므로, y가 커지면 Y는 **음의** 방향으로 움직인다.
- XY의 길이를 $a - x - y$ 대신 $a + x + y$로 쓰는 것: x와 y가 모두 커지면 가운데 용수철은 짧아진다.
- 두 주기가 다르다는 것만으로 논증하는 것: 주기가 다르다는 것만으로는 충분하지 않다(주기가 1과 2이면 $t = 2$에서 다시 맞아떨어진다). 중요한 것은 두 주기의 비 $\sqrt{3}$이 무리수(irrational)라는 점이다.

STEP 너머

결합 $x - y$와 $x + y$는 이 계의 **정규 모드**(*normal modes*)이다. 즉 이들은 행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$의 고유벡터(eigenvectors)이며, 고유값(eigenvalues) 1과 3이 진동수의 제곱 ω^2과 $3\omega^2$을 준다. 연성계의 모든 미소 진동은 이처럼 정규 모드로 분해되며, 진동수의 비가 모두 유리수일 때에만 운동이 주기적이다. 그렇지 않으면 운동은 준주기적(quasi-periodic)이어서, 결코 반복되지 않지만 처음 상태에 얼마든지 가까이 되돌아온다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 연성 진동자(coupled oscillators)를 다루고, Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 그 바탕에 있는 고유벡터 방법을 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.