풀이

STEP III 2014, 문제 1

순수수학 • 로그함수의 급수 전개

> **STEP III 2014, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q1

핵심 아이디어

삼차식(cubic) $1+qx^2+rx^3$은 $(1+ax)(1+bx)(1+cx)$로 인수분해(factorise)되므로, 그 로그(logarithm)는 세 개의 로그로 나뉘고, 각각은 우리가 이미 아는 급수(series)를 가진다. 이로부터 x^n의 계수(coefficient)를 a, b, c로 나타낼 수 있다. 한편 같은 로그를 $u = qx^2+rx^3$으로 두고 $\ln(1+u)$로 직접 전개(expansion)할 수도 있으며, 그러면 계수를 q와 r로 나타낼 수 있다. 두 전개를 비교하면 q와 r에 관한 사실이 S_n 사이의 항등식(identity)으로 바뀐다.

풀이

전개하면

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx) = 1+(a+b+c)x+(ab+bc+ca)x^2+abc\,x^3.$$

$a+b+c = 0$이므로 x항은 사라진다. 모든 실수 x에 대하여 값이 같은 두 다항식(polynomial)은 계수가 같으므로, x^2과 x^3의 계수를 $1+qx^2+rx^3$과 비교하면

$$q = bc+ca+ab, \qquad r = abc,$$

를 얻고, 이것이 증명하려던 것이다.

소문항 (i)

$|x|$가 충분히 작으면(구체적으로 $|x| < 1/\max(|a|,|b|,|c|)$일 때, 또는 $a=b=c=0$이면 모든 x에 대하여) 각 인수는 양수이고 각 로그는 수렴하는(convergent) 급수를 가진다.

$|t| < 1$에서 성립하는 $\ln(1+t) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}t^n/n$을 이용하면

$$\begin{aligned}\ln(1+qx^2+rx^3) &= \ln(1+ax)+\ln(1+bx)+\ln(1+cx)\\ &= \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{a^nx^n}{n}+\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{b^nx^n}{n}+\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{c^nx^n}{n}\\ &= \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{a^n+b^n+c^n}{n}x^n.\end{aligned}$$

따라서 x^n의 계수는 $(-1)^{n+1}S_n$이고, 이것이 증명하려던 것이다. ($n=1$일 때 이는 $S_1 = a+b+c = 0$이며, x항이 없다는 사실과 일치한다.)

소문항 (ii)

이제 같은 함수를 두 번째 방법으로 전개한다. $u = qx^2+rx^3$으로 두면

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\cdots.$$

u의 모든 항은 차수(degree)가 2 이상이므로, u^k에는 x^{2k}부터 x^{3k}까지의 거듭제곱만 나타난다. x^n의 계수를 구하려면 $2k \leq n \leq 3k$인 u^k만 보면 된다.

$$\begin{aligned}u &= qx^2+rx^3,\\ u^2 &= q^2x^4+2qr\,x^5+r^2x^6.\end{aligned}$$

따라서

- x^2: u만 기여하며, q를 준다.
- x^3: u만 기여하며, r를 준다.
- x^5: $-\frac{1}{2}u^2$만 기여하며, $-\frac{1}{2}(2qr) = -qr$를 준다.

계수가 $-S_2, S_3, S_5$인 소문항 (i)과 비교하면

$$S_2 = -q, \qquad S_3 = r, \qquad S_5 = -qr.$$

그러므로 $S_2S_3 = (-q)(r) = -qr = S_5$이고, 이것이 증명하려던 것이다.

> **생각해 보기** 같은 함수에 대한 서로 다른 두 급수의 계수를 비교해도 되는 이유는 무엇인가?

두 전개는 모두 0 주변의 어떤 구간에서 $\ln(1+qx^2+rx^3)$으로 수렴하는 x의 거듭제곱급수(power series)이다. 0 근처에서 수렴하는 거듭제곱급수의 계수는 유일하므로(매클로린 정리(Maclaurin's theorem)에서처럼 계수는 0에서의 도함수 값을 $n!$로 나눈 것이다), 두 계수는 같아야 한다.

소문항 (iii)

x^7에 대해서는 $2k \le 7 \le 3k$이어야 하므로 $k = 3$일 수밖에 없다. 이항정리(binomial theorem)로 $u^3 = (qx^2 + rx^3)^3$을 전개하면

$$u^3 = q^3x^6 + 3q^2r\,x^7 + 3qr^2x^8 + r^3x^9,$$

이므로 $\ln(1+u)$에서 x^7의 계수는 $\frac{1}{3} \cdot 3q^2r = q^2r$이다. 소문항 (i)에 따르면 이 계수는 $(-1)^8 S_7 = S_7$이므로 $S_7 = q^2r$이다. 소문항 (ii)를 이용하면

$$S_2S_5 = (-q)(-qr) = q^2r = S_7,$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

소문항 (iv)

x^9에 대해서는 $2k \le 9 \le 3k$이어야 하므로 $k = 3$ 또는 $k = 4$이다.

- $\frac{1}{3}u^3$에서: u^3의 x^9항은 r^3x^9이므로 $\frac{1}{3}r^3$을 준다.
- $-\frac{1}{4}u^4$에서: $(qx^2 + rx^3)^4$에서 x^9항을 얻으려면 qx^2 인수 세 개와 rx^3 인수 한 개가 필요하므로 $\binom{4}{1}q^3r\,x^9 = 4q^3r\,x^9$를 얻는다. 이는 $-q^3r$만큼 기여한다.

따라서 x^9의 계수는 $\frac{1}{3}r^3 - q^3r$이고, 소문항 (i)에 의해 이는 $(-1)^{10}S_9 = S_9$와 같다. 한편

$$S_2S_7 = (-q)(q^2r) = -q^3r.$$

그러므로

$$S_9 - S_2S_7 = \tfrac{1}{3}r^3 = \tfrac{1}{3}(abc)^3,$$

이고, 주장 $S_2S_7 = S_9$는 정확히 $abc = 0$일 때에만 성립한다. 일반적으로는 거짓이다.

구체적인 반례(counterexample)로 $a = b = 1$, $c = -2$를 잡자($a + b + c = 0$이고 $abc = -2 \neq 0$이다). 그러면

$$S_2 = \frac{1+1+4}{2} = 3, \qquad S_7 = \frac{1+1-128}{7} = -18, \qquad S_9 = \frac{1+1-512}{9} = -\frac{170}{3},$$

이므로 $S_2S_7 = -54 \neq -\frac{170}{3} = S_9$이다. 주장은 거짓이다.

생각해 보기 소문항 (ii)와 (iii)에서는 성립했는데, 왜 x^9에서 규칙이 깨지는가?

x^5와 x^7에서는 u의 거듭제곱 하나만 기여하므로, 각 계수는 q와 r의 곱 하나이고, 이것이 마침 앞의 S들의 적절한 곱으로 인수분해된다. x^9에서는 u의 거듭제곱 두 개가 기여하며, u^3에서 나오는 여분의 r^3항이 인수분해를 망가뜨린다.

검산

- $a = b = 1$, $c = -2$이면 $q = -3$, $r = -2$이다. 그러면 $S_2 = 3 = -q$, $S_3 = (1 + 1 - 8)/3 = -2 = r$, $S_5 = (1 + 1 - 32)/5 = -6 = -qr$이므로 $S_2S_3 = S_5$이다. 또한 $S_7 = -18 = q^2r$이고, $S_9 - S_2S_7 = -\frac{170}{3} + 54 = -\frac{8}{3} = \frac{1}{3}r^3$으로, 예측한 그대로이다.
- $c = 0$이면(따라서 $b = -a$) 홀수 번째 S_n은 모두 사라지고 (iv)의 주장의 양변은 모두 0이 되므로, $abc = 0$일 때 주장이 성립한다는 결과와 일치한다.
- (ii)–(iv)의 항등식과 $S_9 - S_2S_7$에 대한 공식은 a와 b를 무작위 유리수로 200번 골라 컴퓨터로 정확한 산술 계산을 하여 확인하기도 했다.

흔한 실수

- x^9에 대한 u^4의 기여를 빠뜨리는 것: u^3에서 멈추기 쉬운데, 그러면 틀린 계수 $\frac{1}{3}r^3$을 얻는다.
- $(-1)^{n+1}$에서 생기는 부호 실수: x^2의 계수는 $-S_2$이므로 $S_2 = -q$이고, q가 아니다.
- 이항계수(binomial coefficient)를 잊는 것: u^3의 x^7항은 $3q^2r$이고, q^2r가 아니다.

STEP 너머

S_n은 ($1/n$이라는 인수를 제외하면) 삼차식의 근들의 **거듭제곱 합**(*power sums*)이고, q, r는 그 **기본 대칭 다항식**(*elementary symmetric polynomials*)이다. 로그를 취해 계수를 비교하는 것은 뉴턴 항등식(Newton's identities)의 생성함수(generating function)를 이용한 증명이다. 뉴턴 항등식은 모든 거듭제곱 합을 기본 대칭 다항식으로 나타내며, 그 배후에 있는 정리는 모든 대칭 다항식(symmetric polynomial)을 기본 대칭 다항식으로 쓸 수 있다는 것이다. 대칭 다항식과 다항식의 근에 대해서는 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)에서 읽을 수 있고, 급수를 다루는 STEP 스타일의 연습 문제는 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에서 더 찾을 수 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.