풀이

STEP II 2014, 문제 9

역학 • 강체의 평형

> **STEP II 2014, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q9

핵심 아이디어

미지의 힘은 세 개(장력(tension), 수직항력(normal reaction), A에서의 마찰력(friction))이고, 방정식도 세 개이다. 수평 방향으로 분해하고, 수직 방향으로 분해하고, 모멘트(moment)를 잡는다. 모서리 A에 대한 모멘트를 잡는 것이 영리한 선택이다. 벽에서 작용하는 두 접촉력이 모두 그 점에 작용하므로 식에서 사라지고, 장력과 무게를 잇는 방정식 하나만 남기 때문이다. 이 식을 얻고 나면, 마찰력의 방향은 줄 혼자서 떠받치는 양이 무게보다 큰지 작은지의 문제일 뿐이다.

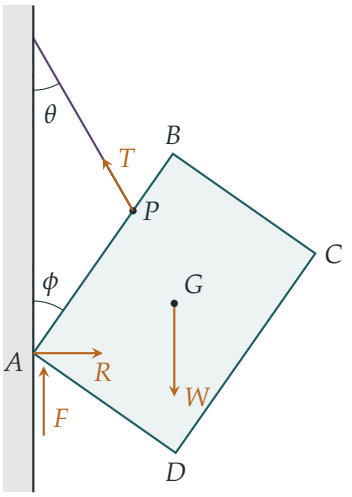
풀이

박판(lamina)을 무게가 W이고 무게중심(centre of mass) G가 직사각형의 중심에 있는 균일한 강체(rigid body)로 모형화하고, 줄은 가볍고 늘어나지 않는다고 하여 장력 T가 줄 전체에서 같다고 한다. A에서 벽은 수직항력 R(수평 방향, 벽에서 멀어지는 쪽)와 마찰력 F(수직 방향)를 작용한다. F는 위쪽을 양의 방향으로 잡으므로, F가 음수이면 실제로 마찰력이 아래쪽으로 작용한다는 뜻이다.

A를 원점으로 하고, x축은 벽에서 멀어지는 수평 방향, y축은 연직 위쪽으로 좌표축을 잡는다. 변 AB는 연직 위쪽 방향과 각 ϕ를 이루므로, AB 방향의 단위벡터는 $(\sin\phi, \cos\phi)$이다. 변 AD는 이에 수직이고 벽에서 멀어지는 쪽을 향하므로, 그 단위벡터는 $(\cos\phi, -\sin\phi)$이다. 따라서

$$G = b(\sin\phi, \cos\phi) + a(\cos\phi, -\sin\phi), \qquad P = d(\sin\phi, \cos\phi),$$

이다. 여기서 P는 줄이 붙어 있는 점이다. 줄은 P에서 위로 벽까지 연직 아래쪽 방향과 각 θ를 이루며 뻗어 있으므로, 박판에 작용하는 장력은 $T(-\sin\theta, \cos\theta)$이다.



소문항 (i)

수평 방향과 수직 방향으로 힘을 분해하면

$$R = T\sin\theta,$$
$$F + T\cos\theta = W.$$

이다. A에 대한 모멘트에서는 R과 F가 아무 기여도 하지 않는다. 점 (x, y)에 작용하는 힘 (f_x, f_y)의 반시계 방향 모멘트는 $xf_y - yf_x$이다. P에 작용하는 장력의 경우 이 값은

$$d\sin\phi \cdot T\cos\theta - d\cos\phi \cdot (-T\sin\theta) = Td\sin(\theta+\phi),$$

이고, G에 작용하는 무게 $(0, -W)$의 경우 $-W(a\cos\phi + b\sin\phi)$이다. 따라서

$$Td\sin(\theta+\phi) = W(a\cos\phi + b\sin\phi). \tag{1}$$

이다. 양 $a\cos\phi + b\sin\phi$는 바로 G와 벽 사이의 수평 거리이며, 이를 이용하면 무게의 모멘트를 빠르게 알 수 있다.

마찰력이 위쪽으로 작용하는 극한 평형(limiting equilibrium)에서는 $F = \mu R = \mu T\sin\theta$이므로, 수직 방향 방정식은

$$T(\cos\theta + \mu\sin\theta) = W.$$

가 된다. 이 W를 (1)에 대입하고 T(줄이 팽팽하므로 양수이다)로 약분하면

$$d\sin(\theta+\phi) = (\cos\theta + \mu\sin\theta)(a\cos\phi + b\sin\phi),$$

을 얻고, 이것이 바로 $(*)$이다.

소문항 (ii)

마찰력이 극한 상태이면서 아래쪽으로 작용하면 $F = -\mu R = -\mu T \sin\theta$이고, 수직 방향 방정식은 $T(\cos\theta - \mu\sin\theta) = W$이다. 다른 것은 아무것도 바뀌지 않으므로 $(*)$는

$$d\sin(\theta+\phi) = (\cos\theta - \mu\sin\theta)(a\cos\phi + b\sin\phi);$$

가 된다. 즉, μ가 $-\mu$로 바뀐다.

소문항 (iii)

이제 마찰력이 극한 상태라고 가정하지 않는다. 방정식 (1)은 어떤 평형 상태에서도 성립하며,

$$T = \frac{W(a\cos\phi + b\sin\phi)}{d\sin(\theta+\phi)},$$

를 준다. 또한 θ와 ϕ가 모두 예각이므로 $\sin(\theta+\phi) > 0$이다. 그러면 수직 방향 방정식에서

$$F = W - T\cos\theta = W\left(1 - \frac{\cos\theta\,(a\cos\phi + b\sin\phi)}{d\sin(\theta+\phi)}\right).$$

를 얻는다.

> **생각해 보기** "$F > 0$"을 탄젠트만 들어간 조건으로 어떻게 바꿀 수 있을까?

마찰력은 정확히 $F > 0$일 때 위쪽으로 작용한다. $d\sin(\theta+\phi) > 0$이므로 이는

$$d\sin(\theta+\phi) > \cos\theta\,(a\cos\phi + b\sin\phi),$$

일 때와 같다. $\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$로 전개하고 양변을 $\cos\theta\cos\phi$로 나눈다. 두 각이 모두 예각이므로 이 값은 양수이고, 따라서 부등식(inequality)의 방향은 바뀌지 않는다.

$$d(\tan\theta + \tan\phi) > a + b\tan\phi.$$

$\tan\theta + \tan\phi > 0$이므로, 필요충분조건(necessary and sufficient condition)은

$$d > \frac{a + b\tan\phi}{\tan\theta + \tan\phi}.$$

이다. (d가 이 값과 같으면 마찰력이 전혀 없고, d가 이보다 작으면 마찰력은 아래쪽으로 작용한다.)

물리적으로 줄은 변 AB에 붙어 있으므로 $d \le 2b$이다. 조건이 성립하면

$$\frac{a + b\tan\phi}{\tan\theta + \tan\phi} < d \le 2b,$$

이므로 $a + b\tan\phi < 2b\tan\theta + 2b\tan\phi$, 즉 $a < b(2\tan\theta + \tan\phi)$이다. 대우(contrapositive)를 취하면, $b(2\tan\theta + \tan\phi) < a$일 때 줄이 붙을 수 있는 어떤 위치에서도 마찰력이 위쪽으로 작용하지 않으므로 조건을 만족할 수 없다. 이로써 증명이 끝난다.

검산

- $\mu = 0$이면 벽이 매끄럽고, $(*)$와 그 소문항 (ii) 형태는 마땅히 그래야 하듯이 일치한다. 둘 다 소문항 (iii)의 경계 경우인 $d\sin(\theta+\phi) = \cos\theta\,(a\cos\phi + b\sin\phi)$로 귀결된다.
- AB가 연직인 박판($\phi \to 0$): 경계 조건은 $d\tan\theta = a$가 된다. 이는 줄의 작용선(line of action)이 G를 지나는 연직선, 즉 벽에서 수평 거리 a만큼 떨어진 직선을 지난다는 뜻이다. 그러면 줄과 무게만으로 균형을 이룰 수 있고, 벽은 수평 방향으로 밀기만 한다.
- 수치적으로 $a = 1, b = 1.5, \theta = 30°, \phi = 40°$일 때, 임계값은 $d \approx (1 + 1.259)/(0.577 + 0.839) \approx 1.595 < 3 = 2b$이다. 모멘트를 A 대신 G에 대해 잡아 세 평형 방정식을 직접 풀면, 이 값보다 조금 클 때 $F > 0$, 조금 작을 때 $F < 0$이 나온다. 수천 개의 무작위 배치를 컴퓨터로 검사하여 $(*)$, 그 소문항 (ii) 형태, 그리고 (iii)의 조건을 확인하였다.

흔한 실수

- P나 G에 대한 모멘트를 잡는 것: 풀리기는 하지만 모멘트 방정식에 R과 F가 들어와 계산이 훨씬 지저분해진다.
- G의 위치를 잘못 잡는 것: D는 벽에서 먼 쪽에 있으므로 AD는 $(\cos\phi, -\sin\phi)$ 방향을 향하고, G는 벽에서 수평 거리 $a\cos\phi + b\sin\phi$만큼 떨어져 있다.
- 마지막 소문항에서 제약 조건 $d \le 2b$를 잊는 것: AB의 길이가 들어오는 곳은 이곳뿐이다.

STEP 너머

이것은 작은 정역학적으로 결정된(statically determinate) 문제이다. 미지의 힘이 세 개이고, 평면 위 강체의 독립적인 평형 방정식도 세 개이다. 공학자들은 무엇보다 먼저 이 개수를 확인한다. 지지점이 더 많으면 정역학만으로는 힘을 구할 수 없고, 물체가 어떻게 변형되는지를 알아야 한다. 미지의 힘들이 작용하는 점에 대해 모멘트를 잡는 요령은 토크(torque)의 원점을 영리하게 고르는 방법의 평면 버전이다. 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.