풀이

STEP II 2014, 문제 8

순수수학 • 가장 큰 이항계수

> **STEP II 2014, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q8

핵심 아이디어

양수 항으로 이루어진 수열(sequence)이 어디에서 최댓값을 갖는지 찾으려면 각 항을 다음 항과 비교한다. 즉 비(ratio) c_{r+1}/c_r를 살펴본다. 이항전개(binomial expansion)에서는 이 비가 r에 대한 간단한 분수이고 꾸준히 감소하므로, 비가 1보다 큰 동안에는 계수(coefficient)가 커지고 1보다 작아지면 계수가 작아진다. 가장 큰 계수는 비가 1을 지나는 곳에 있으며, 이후의 모든 소문항은 한 식의 정수 부분(integer part)을 읽어 내는 문제가 된다.

풀이

계수와 그 비

이항정리(binomial theorem)에 의해

$$c_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r, \qquad 0 \le r \le n.$$

$a, b > 0$이므로 이 값들은 모두 양수이다. $0 \le r \le n-1$에 대하여

$$\frac{c_{r+1}}{c_r} = \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} \cdot \frac{b}{a} = \frac{(n-r)\,b}{(r+1)\,a},$$

이다. 여기서 $\binom{n}{r+1} = \binom{n}{r}\frac{n-r}{r+1}$을 이용하였다. 이제

$$L = \frac{b(n+1)}{a+b}.$$

이라 하자. $(r+1)a > 0$이므로

$$c_{r+1} \geq c_r \iff (n-r)b \geq (r+1)a \iff nb - a \geq r(a+b)$$
$$\iff r \leq \frac{nb-a}{a+b} = \frac{b(n+1)}{a+b} - 1 = L - 1,$$

이고, 모든 단계에서 부등호 대신 $=$를 써도 같은 동치 관계가 성립한다. 따라서

$$c_{r+1} > c_r, \text{ 단} r < L-1, \qquad c_{r+1} = c_r, \text{ 단} r = L-1, \qquad c_{r+1} < c_r, \text{ 단} r > L-1. \quad (*)$$

m의 범위

상한. $m = 0$이면 $L > 0$이므로 $m \leq L$이다. $m \geq 1$이면 c_m이 가장 크므로 $c_m \geq c_{m-1}$이고, $r = m-1$로 두고 $(*)$를 적용하면 $m - 1 \leq L - 1$, 즉 $m \leq L$을 얻는다.

하한. $m = n$이면 ($\frac{b}{a+b} < 1$이므로) $L < n+1$이고, 따라서 $m \geq L-1$이다. $m \leq n-1$이면 $c_m \geq c_{m+1}$이고, $r = m$으로 두고 $(*)$를 적용하면 $m \geq L-1$이어야 한다.

그러므로 모든 경우에

$$\frac{b(n+1)}{a+b} - 1 \leq m \leq \frac{b(n+1)}{a+b},$$

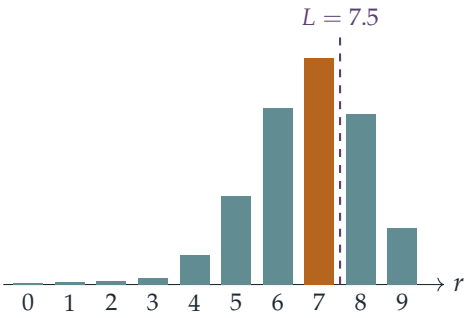
이 성립하며, 이것이 증명하려던 것이다.

> **생각해 보기** 왜 m의 값이 세 개일 수 없고, 서로 이웃하지 않은 두 값일 수도 없을까?

구간 $[L-1, L]$의 길이는 1이다. L이 정수가 아니면 이 구간에는 정수가 정확히 하나, 즉 $\lfloor L \rfloor$만 들어 있으므로 m은 유일하다. L이 정수이면 이 구간에는 연속한 두 정수 $L-1$과 L이 정확히 들어 있으므로 m은 이 둘 중 하나이다. (실제로 $r = L-1$로 두고 $(*)$를 적용하면 $c_{L-1} = c_L$이므로 두 값 모두 정말로 가장 크다.) 어느 경우든 유일한 값 또는 두 값 중 큰 값은

$$G(n,a,b) = \left\lfloor \frac{b(n+1)}{a+b} \right\rfloor.$$

이다. 이제부터는 이 공식만 있으면 된다.



$(1+3x)^9$의 계수를 비율에 맞게 그린 그림: $r < L - 1 = 6.5$인 동안 커지다가 그 뒤로 작아지며, $r = 7$에서 최대가 된다.

소문항 (i)

$(n, a, b) = (9, 1, 3)$이면 $L = \frac{3\times 10}{4} = 7.5$이므로 $G(9, 1, 3) = 7$이다.

$(n, a, b) = (9, 2, 3)$이면 $L = \frac{3\times 10}{5} = 6$으로 정수이므로, 가장 큰 계수가 $r = 5$와 $r = 6$ 모두에서 나타나고 $G(9, 2, 3) = 6$이다. (확인: $c_5 = 126 \cdot 2^4 \cdot 3^5 = 489\,888 = 84 \cdot 2^3 \cdot 3^6 = c_6$.)

소문항 (ii)

$a = b$이면 $L = \frac{n+1}{2}$이다.

- $n = 2k$: $L = k + \frac{1}{2}$이므로 $G(2k, a, a) = k$이다(가운데 계수 하나뿐이다).
- $n = 2k - 1$: $L = k$로 정수이므로 가운데의 두 계수 $r = k - 1$과 $r = k$가 같고, $G(2k - 1, a, a) = k$이다.

이는 파스칼의 삼각형(Pascal's triangle)의 각 행이 갖는 대칭성과 일치한다.

소문항 (iii)

n과 b를 고정하면 $L = \frac{b(n+1)}{a+b}$는 a에 대한 감소함수(decreasing function)이므로 $\lfloor L \rfloor$는 a에 대하여 증가하지 않는 함수이다. 따라서 양의 정수 범위에서는 $a = 1$일 때 가장 크며, 이때 $G(n, 1, b) = \left\lfloor \frac{b(n+1)}{b+1} \right\rfloor$이다. (다른 a 값이 같은 값을 줄 수는 있지만, 더 큰 값을 주지는 않는다.)

소문항 (iv)

이제

$$\frac{b(n+1)}{b+1} = (n+1) - \frac{n+1}{b+1}.$$

이다. $\frac{n+1}{b+1} > 0$이므로 이 값은 $n + 1$보다 작고, 따라서 $G(n, 1, b) \le n$이다. (이는 $m \le n$에서도 나온다.) 또한

$$G(n, 1, b) = n \iff (n+1) - \frac{n+1}{b+1} \ge n \iff \frac{n+1}{b+1} \le 1 \iff b \ge n.$$

따라서 $G(n, 1, b)$의 최댓값은 n이고, 이 값은 정확히 $b \ge n$일 때 얻어진다. $b = n$이면 $c_{n-1} = n \cdot b^{n-1} = b^n = c_n$이므로 마지막 두 계수가 같고, $b > n$이면 마지막 계수 b^n이 유일하게 가장 크다.

검산

- $(1+3x)^9$의 계수는 $1, 27, 324, 2268, 10206, 30618, 61236, 78732, 59049, 19683$이다. (i)에서 구한 대로 가장 큰 값은 $r = 7$에 있다.
- $(1+x)^4$ $(n = 2k,\ k = 2)$의 계수 $1, 4, 6, 4, 1$은 $r = 2 = k$에서 최대이다. $(1+x)^3$ $(k = 2)$의 계수는 $1, 3, 3, 1$로, $r = 1, 2$에서 같고 그중 큰 값은 $2 = k$이다.
- (iv)에서 $n = 3$일 때: $(1+2x)^3$의 계수는 $1, 6, 12, 8$로 $r = 2$에서 최대이고, $(1+3x)^3$의 계수는 $1, 9, 27, 27$이므로 $b = 3$이 되면 $G = 3$에 도달한다.
- $n < 30$, $a, b < 15$인 모든 경우에 대하여 컴퓨터로 $G(n, a, b) = \lfloor b(n+1)/(a+b) \rfloor$를 확인한 결과 모두 일치하였다.

흔한 실수

- 범위를 증명할 때 양 끝의 경우 $m = 0$과 $m = n$을 빠뜨리는 것: 비교할 c_{-1}이나 c_{n+1}이 없다.
- L이 정수일 때 같은 두 값 중 작은 쪽을 택하는 것: G는 큰 쪽으로 정의되므로 $G(9, 2, 3) = 6$이지 5가 아니다.
- (iv)에서 $b = n$만 답하는 것: $b \geq n$인 모든 b가 $G = n$을 준다.

STEP 너머

여기서 쓴 비 판정, 즉 연속한 항을 비교하는 방법은 급수(series)의 수렴(convergence)에 대한 비판정법(ratio test)과 같은 아이디어이며, $p = \frac{b}{a+b}$인 이항분포(binomial distribution) $\mathrm{B}(n, p)$의 최빈값(mode)을 찾아 준다. 최빈값은 $\lfloor (n+1)p \rfloor$이다. 이항계수처럼 항이 커지다가 작아지는 수열을 단봉(unimodal) 수열이라 하며, 이를 증명하는 데에는 보통 로그 오목성(log-concavity) $(c_r^2 \geq c_{r-1}c_{r+1})$을 이용한다. 확률 쪽 내용은 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)을 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.