풀이

STEP II 2014, 문제 7

순수수학 • 절댓값 함수의 그래프

> **STEP II 2014, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q7

핵심 아이디어

절댓값 함수(modulus function)들의 합은 구간별 일차함수(piecewise linear)이다. 즉 절댓값 기호 안의 식 중 하나가 0이 되는 점에서만 기울기(gradient)가 바뀐다. 따라서 $|x-a|+|x-b|$의 그래프는 a와 b 사이에 평평한 바닥이 있고 기울기가 ± 2인 벽이 양옆에 선 "욕조" 모양이다. 그러면 뒤에 나오는 방정식들의 해의 개수를 세는 일은 기울기를 비교하는 문제로 바뀐다. 기울기가 2인 그래프는 기울기가 1인 그래프를 언제나 따라잡고, 기울기가 같은 두 그래프는 일치하거나 결코 만나지 않는다.

풀이

이하에서는 $f(x)=|x-a|+|x-b|$로 둔다. 단, $a<b$이다.

소문항 (i)

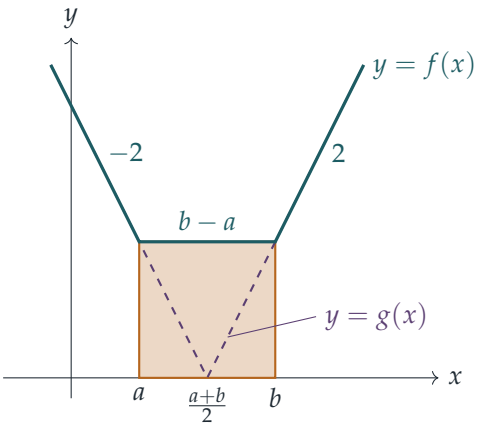
구간별로 절댓값 기호를 없애면 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} a+b-2x, & x\le a,\\ b-a, & a\le x\le b,\\ 2x-a-b, & x\ge b. \end{cases}$$

따라서 기울기는 -2 (구간 $x<a$), 0 (구간 $a<x<b$), 2 (구간 $x>b$)이다. 그래프는 연속(continuous)이며, $[a,b]$ 위에서 높이 $b-a$인 평평한 바닥을 가진다.

$g(x)=|2x-a-b|=2|x-\frac{a+b}{2}|$의 그래프는 꼭짓점(vertex)이 $(\frac{a+b}{2},0)$이고 기울기가 ± 2인 V자 모양이다. $x\ge b$이면 $2x-a-b\ge b-a>0$이므로 $g(x)=2x-a-b=f(x)$이고, 마찬가지로 $g(x)=a+b-2x=f(x)$ (단, $x\le a$)이다. 따라서 두 그래프는 (a,b)

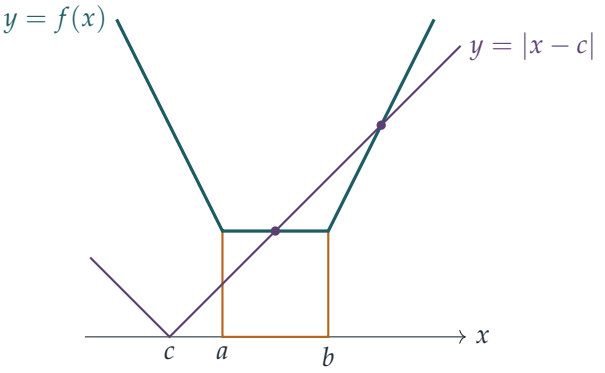
바깥에서 일치한다. 그 안쪽에서 g는 0까지 내려가지만 f는 $b-a$에 머문다. (사실 $f(x) = \max\{b-a, g(x)\}$이다.)



이 사각형(quadrilateral)의 꼭짓점은 $(a,0), (b,0), (b,b-a), (a,b-a)$이다. 여기서 $f(a) = f(b) = b-a$를 이용했다. 밑변의 길이는 $b-a$이고 세로 변들의 길이도 $b-a$이며, 모든 각이 직각이다. 따라서 이것은 한 변의 길이가 $b-a$인 **정사각형**(square)이다. 또한 $g(a) = g(b) = b-a$이므로, g의 V자는 정사각형 밑변의 중점에서 출발해 위쪽 두 꼭짓점을 지난다는 점에도 주목하자.

소문항 (ii)

이제 $y = f(x)$를 $y = |x-c|$와 비교하자. 후자는 꼭짓점 $(c,0)$이 축 위에 있고 양팔의 기울기가 ± 1인 V자이다. 핵심은 f가 언제나 $b-a > 0$ 이상이고, 그 벽(기울기 ± 2)이 V자의 팔보다 가파르다는 사실이다. 그림은 $c < a$인 경우로, V자가 욕조를 두 번 자른다.



$a < c < b$인 경우: 해가 없다. $[a,b]$에서 거리 $|x-c|$는 기껏해야 $\max\{c-a, b-c\} <$

$b-a=f(x)$이므로, V자는 욕조 바닥보다 엄격하게 아래에 있다. $x \geq b$이면

$$f(x)-|x-c| = (2x-a-b)-(x-c) = x-b+(c-a) \geq c-a > 0,$$

이고, $x \leq a$인 경우도 같은 논증(또는 아래의 대칭성)으로 처리된다. 따라서 V자는 완전히 욕조 안에 놓이고, 해는 없다.

$c=a$ 또는 $c=b$인 경우: 해가 하나이다. $c=a$라 하자. $[a,b]$에서 $|x-a| = x-a \leq b-a$이고, 등호는 $x=b$일 때만 성립한다. $x>b$이면 $f(x)-(x-a) = x-b > 0$이고, $x<a$이면 $f(x)-(a-x) = b-x > 0$이다. 따라서 유일한 해는 $x=b$이다. V자의 오른팔이 정사각형의 위쪽 꼭짓점 $(b, b-a)$를 정확히 지나는 것이다. 마찬가지로 $c=b$이면 유일한 해는 $x=a$이다.

$c<a$인 경우: 해가 둘이다. 왼팔 $y=c-x$는 $x \leq c < a$인 범위에 있고, 여기서 f의 기울기는 -2이다. $x=c$에서 $f(c)>0=c-c$이고, 왼쪽으로 갈수록 f가 팔보다 빠르게 올라가므로 모든 $x \leq c$에 대해 $f(x)>c-x$이다. 왼팔에서는 해가 생기지 않는다.

오른팔 $y=x-c$ $(x \geq c)$에 대해서는 $k(x)=f(x)-(x-c)$라 하자. f의 기울기에서 1을 빼면, k의 기울기는 (c,a)에서 -3, (a,b)에서 -1, $x>b$에서 $+1$이다. 따라서 k는 $[c,b]$에서 순감소(strictly decreasing)하고 $[b,\infty)$에서 순증가한다. 또한

$$k(c)=f(c)>0, \qquad k(b)=(b-a)-(b-c)=c-a<0, \qquad k(x)\to\infty, \text{단} x\to\infty.$$

따라서 k는 (c,b)에서 정확히 하나, (b,∞)에서 정확히 하나의 영점을 가진다. 구체적으로 이 해들은

$$x=a+b-c \quad \text{그리고} \quad x=\begin{cases} b-a+c, & 2a-b \leq c < a, \\ \frac{1}{3}(a+b+c), & c<2a-b, \end{cases}$$

이며, 두 번째 해는 각각 욕조의 바닥 또는 왼쪽 벽과 만나는 점이다.

$c>b$인 경우: 해가 둘이다. 대칭(reflection) $x \mapsto a+b-x$는 직선 $x=\frac{a+b}{2}$에 대한 대칭으로, f를 바꾸지 않으며($|x-a|$와 $|x-b|$를 서로 맞바꾸므로) $|x-c|$를 $|x-c'|$로 보낸다. 여기서 $c'=a+b-c<a$이다. 따라서 이 경우는 앞의 경우를 거울에 비춘 것이다.

정리하면, 해의 개수는 0 ($a<c<b$일 때), 1 ($c=a$ 또는 $c=b$일 때), 2 ($c<a$ 또는 $c>b$일 때)이다.

소문항 (iii)

$F(x)=|x-c|+|x-d|$라 하자. 소문항 (i)에 의해 F는 두 번째 욕조로, $[c,d]$ 위에서 높이 $d-c$인 바닥과 기울기 ± 2인 벽을 가진다. $d-c<b-a$이므로 그 바닥은 f의 바닥보다 낮고 좁다. 두 바닥의 중점을

$$m=\tfrac{1}{2}(a+b), \qquad n=\tfrac{1}{2}(c+d)$$

로 쓰고, $h(x) = f(x) - F(x)$라 하자.

아주 왼쪽($x \le \min\{a, c\}$)에서는 두 그래프가 모두 왼쪽 벽 위에 있으므로 $h(x) = (a + b - 2x) - (c + d - 2x) = 2(m - n)$이다. 아주 오른쪽($x \ge \max\{b, d\}$)에서는 $h(x) = 2(n - m)$이다. 그 사이에서 h는 연속인 구간별 일차함수이다.

> **생각해 보기** 두 그래프가 선분 하나를 통째로 공유해서 해가 무수히 많아질 수 있을까?

그것은 기울기가 같은 곳에서만 가능하다. 두 바닥은 모두 평평하지만 높이 $b - a \neq d - c$가 서로 다르므로 겹칠 수 없다. 그 밖에 기울기가 같은 것은 두 그래프가 모두 왼쪽 벽 위에 있을 때($x < \min\{a, c\}$)나 모두 오른쪽 벽 위에 있을 때($x > \max\{b, d\}$)뿐이고, 거기서 $h = \pm 2(m - n)$이다. 따라서 두 그래프가 선분을 공유하는 것은 정확히 $m = n$일 때이다.

$a + b = c + d$인 경우: 해가 무수히 많다. 이때 $h = 0$이 $x \le \min\{a, c\}$와 $x \ge \max\{b, d\}$에서 성립한다. $d - c < b - a$이고 중점이 같으므로 $a < c < d < b$이다. 즉 작은 욕조가 큰 욕조의 한가운데에 놓인다. $c \le x \le b$에서 F의 그래프는 바닥이나 오른쪽 벽 위에 있으므로 $F(x) \le 2b - c - d = b - a = f(x)$이고, 등호는 $x = b$일 때만 성립한다. 대칭성에 의해 $[a, d]$에서도 마찬가지이다. 따라서 해집합은 정확히 $x \le a$인 부분과 $x \ge b$인 부분을 합친 것이다.

$a + b < c + d$인 경우: 해가 정확히 하나이다. 이때 아주 왼쪽에서 $h = 2(m - n) < 0$이고 아주 오른쪽에서 $h = 2(n - m) > 0$이다. h는 어디에서 감소할 수 있을까? f의 기울기가 F의 기울기보다 작아야 한다. 가능한 경우는 두 가지이다.

- f는 왼쪽 벽 위에 있는데 F는 그렇지 않은 경우로, $c < x < a$이어야 한다. 그러면 $c < a$이고, $d - c < b - a$이므로 $d < b$이기도 하여 $c + d < a + b$가 되는데, 이는 지금의 경우에 맞지 않는다.
- f는 바닥 위에, F는 오른쪽 벽 위에 있는 경우로, $d < x < b$이어야 한다.

따라서 h는 $(-\infty, d]$에서 감소하지 않는다. $[d, \infty)$에서는, h가 $[d, b]$에서 증가하지 않고($d < b$인 경우) 그다음 $x \ge \max\{b, d\}$에서 $2(n - m)$으로 일정하다. 따라서 모든 $x \ge d$에 대해 $h(x) \ge 2(n - m) > 0$이다. $(-\infty, d]$에서 h는 값 $2(m - n) < 0$에서 $h(d) > 0$까지 감소하지 않고 올라가며, (위 상자의 논의에 의해) 값이 영인 구간에서 일정할 수 없다. 따라서 h는 거기서 정확히 하나의 영점을 가진다. 그러므로 전체적으로 해는 정확히 하나이다.

$a + b > c + d$인 경우: 해가 정확히 하나이다. 대칭 $x \mapsto -x$를 쓰면 된다. 이 변환은 a, b, c, d를 $-b, -a, -d, -c$로 바꾸고 두 합 사이의 부등식 방향을 뒤집는다.

정리하면, $a < b$, $c < d$, $d - c < b - a$일 때, $a + b = c + d$이면(두 구간의 중점이 같으면) 해가 무수히 많으며, 바로 모든 $x \le a$와 모든 $x \ge b$가 해이다. 그 밖의 경우에는 해가 정확히 하나이다.

검산

- 소문항 (ii)에서 $a = 1, b = 3, c = 0$으로 두면, 해 $x = a + b - c = 4$와 $x = b - a + c = 2$에 대해 $|3| + |1| = 4, 1 + 1 = 2$가 되어 조건을 만족한다. $c = -5$이면 두 번째 해는 $\frac{1}{3}(1 + 3 - 5) = -\frac{1}{3}$이고, 실제로 $\frac{4}{3} + \frac{10}{3} = \frac{14}{3} = |-\frac{1}{3} + 5|$이다.
- 소문항 (iii)에서 $a = 0, b = 10, c = 6, d = 7$로 두면, h는 아주 왼쪽에서 -3이고 $[6, 7]$에서 9까지 올라갔다가 다시 3으로 내려가 그대로 머문다. 유일한 영점은 $x = \frac{3}{2}$이며, 여기서 양변이 모두 10이다.
- a, b, c, d에 정수를 무작위로 수만 번 택해 컴퓨터로 확인한 결과, 모든 경우에 해의 개수가 위와 정확히 일치했다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 V자가 정사각형의 꼭짓점에 딱 닿는 경계의 경우 $c = a$와 $c = b$를 빠뜨린다.
- 소문항 (iii)에서 h가 단조(monotonic)라고 가정한다. 그렇지 않다. 작은 욕조가 큰 욕조 안에서 한가운데를 벗어나 있으면 h는 (d, b)에서 감소한다. 그래도 해의 개수가 맞는 것은 h가 그곳에서 이미 양수이기 때문이다.
- 소문항 (iii)에서 중점이 일치할 때 해가 무수히 많아지는 경우를 놓친다.

STEP 너머

함수 $|x - a| + |x - b|$는 x에서 두 점까지의 거리의 합이다. 이런 거리의 합을 최소화하는 것은 통계학의 중앙값(median)과 ℓ^1 노름(norm, "택시 거리" 노름)의 바탕에 있는 아이디어이다. f와 같은 함수는 볼록(convex)하며, 여기서 쓴 '조각마다 기울기가 커진다'는 논증은 볼록 해석(convex analysis)의 출발점이다. 볼록 해석은 선형계획법(linear programming)과 최적화(optimisation)의 토대가 된다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석 입문)는 여기서 쓴 연속성과 단조성 논증을 엄밀하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.