풀이

STEP II 2014, 문제 6

순수수학 • 삼각급수

> **STEP II 2014, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q6

핵심 아이디어

각 $\cos rx$에 $2\sin\frac{1}{2}x$를 곱하면 두 사인의 차가 되므로, 합을 구할 때 중간 항들이 연쇄적으로 소거된다(telescope). 이 합은 정확히 $S_n'(x)$이고, 바로 그 때문에 이 항등식이 주어져 있다. 이 항등식은 S_n이 어디에서 정류점(stationary point)을 갖는지 알려 준다. 그런 점에서 새로 더해지는 항 $\frac{1}{n}\sin nx$는 음이 아님이 밝혀진다. 따라서 이 항을 더해도 음의 최솟값이 생길 수 없고, $S_1 = \sin x$에서 시작하는 귀납법(induction)으로 증명이 마무리된다.

풀이

코사인 합

곱을 합차로 바꾸는 공식(factor formula) $\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$에 $A = (r+\frac{1}{2})x$, $B = (r-\frac{1}{2})x$를 대입하면

$$\sin(r+\tfrac{1}{2})x - \sin(r-\tfrac{1}{2})x = 2\cos rx\,\sin\tfrac{1}{2}x.$$

이 식을 $r = 1$부터 n까지 더하면, 우변들의 합은 $2\sin\frac{1}{2}x\,(\cos x + \cdots + \cos nx)$가 되고, 좌변에서는 첫 항과 마지막 항을 제외한 모든 항이 소거된다.

$$2\sin\tfrac{1}{2}x\sum_{r=1}^{n}\cos rx = \sin(n+\tfrac{1}{2})x - \sin\tfrac{1}{2}x.$$

양변을 $2\sin\frac{1}{2}x \neq 0$으로 나누면 구하는 결과를 얻는다. 한편 항별로 미분하면

$$S_n'(x) = \sum_{r=1}^{n}\cos rx,$$

이므로, 이 항등식은 S_n'의 닫힌 형태(closed form)임에 주목하자.

소문항 (i)

여기서 $S_2(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$이므로

$$S_2'(x) = \cos x + \cos 2x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1).$$

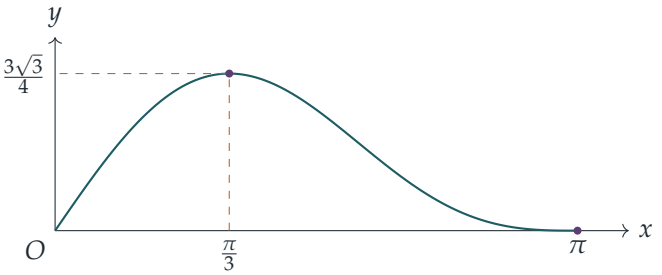
$[0, \pi]$에서 이 식의 값은 $\cos x = \frac{1}{2}$, 즉 $x = \frac{\pi}{3}$일 때와 $\cos x = -1$, 즉 $x = \pi$일 때 0이 된다. 이때의 함숫값은

$$S_2(\tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{3\sqrt{3}}{4}, \qquad S_2(\pi) = 0.$$

$\cos x + 1 \geq 0$이므로 S_2'의 부호는 $2\cos x - 1$의 부호와 같다. 즉 $[0, \frac{\pi}{3})$에서 양수이고 $(\frac{\pi}{3}, \pi)$에서 음수이다. 따라서 $x = \frac{\pi}{3}$에서 최댓값(maximum)을 가지며, S_2는 그곳부터 감소하여 $x = \pi$에서 0에 도달하는데, 도달할 때의 기울기는 0이다. π 근처에서 $x = \pi - t$로 두면

$$S_2 = \sin t - \tfrac{1}{2}\sin 2t \approx \left(t - \tfrac{t^3}{6}\right) - \left(t - \tfrac{4t^3}{6}\right) = \tfrac{1}{2}t^3,$$

이므로 곡선은 축에 닿을 때 삼차함수처럼 평평해진다. 또한 $S_2(0) = 0$이고 $S_2'(0) = 2$이다.



소문항 (ii)

$0 < x_0 < \pi$에서 $S_n'(x_0) = 0$이라 하자. 그러면 $\sin\frac{1}{2}x_0 \neq 0$이므로 항등식을 적용할 수 있고, $\sin(n + \frac{1}{2})x_0 = \sin\frac{1}{2}x_0$을 얻는다. 좌변을 전개하면

$$\sin nx_0\cos\tfrac{1}{2}x_0 + \cos nx_0\sin\tfrac{1}{2}x_0 = \sin\tfrac{1}{2}x_0 \iff \sin nx_0\cos\tfrac{1}{2}x_0 = (1 - \cos nx_0)\sin\tfrac{1}{2}x_0.$$

$0 < \frac{1}{2}x_0 < \frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\frac{1}{2}x_0 > 0$이고, 양변을 이것으로 나누면

$$\sin nx_0 = (1 - \cos nx_0)\tan\tfrac{1}{2}x_0,$$

이 되어 요구된 식을 얻는다. 따라서 $n \geq 2$일 때

$$S_n(x_0) - S_{n-1}(x_0) = \frac{1}{n}\sin nx_0 = \frac{1}{n}(1 - \cos nx_0)\tan\tfrac{1}{2}x_0 \geq 0,$$

이다. $1 - \cos nx_0 \geq 0$이고 $\tan\frac{1}{2}x_0 > 0$이기 때문이다. 그러므로 $S_n(x_0) \geq S_{n-1}(x_0)$이다.

이제 모든 $x \in (0, \pi)$에 대해 $S_{n-1}(x) > 0$이라 하고, 모순을 이끌어 내기 위해 어떤 $c \in (0, \pi)$에 대해 $S_n(c) \leq 0$이라고 가정하자.

생각해 보기 사용할 정류점이 존재한다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

S_n은 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 연속(continuous)이므로 이 구간에서 최솟값 m을 가지며, $m \leq S_n(c) \leq 0$이다. $m < 0$이면 $S_n(0) = S_n(\pi) = 0$이므로 최솟값은 끝점에서 나타나지 않는다. $m = 0$이면 c 자체가 최솟값을 갖는 내부의 점이다. 어느 경우든 $S_n(x_0) = m \leq 0$인 $x_0 \in (0, \pi)$가 존재하고, S_n은 미분가능하므로 내부에서의 최솟점은 정류점이다. 즉 $S_n'(x_0) = 0$이다. 그러면 앞의 결과로부터

$$0 \geq S_n(x_0) \geq S_{n-1}(x_0) > 0,$$

이 되어 모순이다. 따라서 모든 $x \in (0, \pi)$에 대해 $S_n(x) > 0$이다.

소문항 (iii)

$0 < x < \pi$에서 $S_n(x) > 0$임을 귀납법으로 증명한다. $n = 1$일 때 $S_1(x) = \sin x > 0$은 $(0, \pi)$에서 성립한다. S_{n-1}에 대해 성립하면, 소문항 (ii)에 의해 S_n에 대해서도 성립한다. 따라서 모든 $n \geq 1$에 대해 성립한다. 끝점에서는 모든 항 $\frac{1}{r}\sin rx$가 0이므로 $S_n(0) = S_n(\pi) = 0$이다. 그러므로 모든 $n \geq 1$과 $0 \leq x \leq \pi$에 대해 $S_n(x) \geq 0$이다.

검산

- 코사인 합에 $n = 1$을 대입하면 $\dfrac{\sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}$는 $\cos x$가 되어야 하는데, 곱을 합차로 바꾸는 공식에 의해 실제로 그렇다.
- 소문항 (i)은 항등식과 일치한다. $S_2' = 0$은 $\sin\frac{5}{2}x = \sin\frac{1}{2}x$를 뜻하고, $(0, \pi]$에서 이 방정식의 해는 $x = \frac{\pi}{3}$과 $x = \pi$이다.
- 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.299$는 촘촘한 격자 위에서 S_2를 직접 계산한 값과 일치한다. 컴퓨터로 확인한 결과, $2 \leq n \leq 40$에 대해 $(0, \pi)$에서 S_n의 모든 정류점을 찾아 각 점에서 소문항 (ii)의 항등식과 $S_n(x_0) \geq S_{n-1}(x_0)$이 성립함을 확인했고, $n \leq 60$에 대해 구간 내부에서 $S_n > 0$임도 확인했다.

흔한 실수

- "모든 곳에서 $S_n \geq S_{n-1}$"이라고 논증하는 것. 이는 거짓이다(예를 들어 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$에서 $\sin 2x < 0$이다). 이 부등식은 S_n의 정류점에서만 성립하며, 그래서 최솟값을 이용한 논증이 필요하다.
- 최솟값의 위치를 찾을 때 끝점을 잊는 것. 양수가 아닌 최솟값이 구간 내부에 있음을 보이려면 반드시 $S_n(0) = S_n(\pi) = 0$을 사용해야 한다.

► $\cos\frac{1}{2}x_0$이 왜 양수인지 밝히지 않고 이것으로 나누는 것.

STEP 너머

소문항 (iii)의 결과는 페예르–잭슨–그론월 부등식(Fejér–Jackson–Gronwall inequality)이다. $n \to \infty$일 때 $S_n(x)$는 $(0, \pi]$에서 $\frac{1}{2}(\pi - x)$로 수렴한다(converge). $\sum \frac{1}{r}\sin rx$는 톱니파의 푸리에 급수(Fourier series)이며, $x = 0$ 근처에서 부분합은 목표값을 넘어선다(깁스 현상(Gibbs phenomenon)). 푸리에 급수, 그리고 그것이 언제 수렴하는가라는 미묘한 문제는 대학의 첫 해석학 과목이나 수리 방법론 과목의 핵심 주제이다. T. W. Körner의 *Fourier Analysis*(푸리에 해석)는 폭넓은 내용을 다룬 훌륭한 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.