풀이

STEP II 2014, 문제 5

순수수학 • 동차 미분방정식

> **STEP II 2014, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q5

핵심 아이디어

두 방정식 모두 우변이 일차식의 비이다. (i)에서는 모든 항의 차수가 1이므로 기울기가 y/x에만 의존하고, $y = xu$로 놓으면 방정식이 변수분리형(separable) 방정식으로 바뀐다. (ii)에서는 상수항 때문에 이 방법이 바로 통하지 않지만, 분자와 분모의 두 직선이 만나는 점으로 원점을 옮기면 상수항을 없앨 수 있다. 그러고 나면 (i)과 똑같은 문제가 된다.

풀이

$y = xu$이면 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

소문항 (i)

우변의 분자와 분모를 x로 나누면 방정식은 다음과 같이 된다.

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2u+1}{u-2}, \qquad \text{따라서} \qquad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2u+1-u(u-2)}{u-2} = \frac{1+4u-u^2}{u-2}.$$

변수를 분리하면

$$\int \frac{u-2}{1+4u-u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

> **생각해 보기** 부분분수(partial fractions)를 쓰지 않고 좌변을 어떻게 적분할 수 있을까?

분모를 미분해 보자. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(1+4u-u^2) = 4-2u = -2(u-2)$이다. 따라서 분자는 분모의 도함수(derivative)의 $-\frac{1}{2}$배이고,

$$-\tfrac{1}{2}\ln\left|1+4u-u^2\right| = \ln|x| + C.$$

양변에 -2를 곱하고 지수를 취하면 양의 상수 A에 대하여 $x^2\left|1+4u-u^2\right| = A$, 즉 어떤 상수 K에 대하여 $x^2(1+4u-u^2) = K$이다(곡선을 따라 부호는 일정하다). 이제 $u = y/x$를 대입하면 $x^2(1+4y/x-y^2/x^2) = x^2+4xy-y^2$이므로

$$x^2+4xy-y^2 = K.$$

$(1,1)$에서 $K = 1+4-1 = 4$이므로 해곡선(solution curve)은

$$\boxed{x^2+4xy-y^2 = 4}$$

이다. ($(1,1)$에서 $u=1$이고, 이때 $1+4u-u^2 = 4 \neq 0$, $u \neq 2$이므로 우리가 나눈 식 중 시작점에서 0이 되는 것은 없다.)

소문항 (ii)

두 직선 $x-2y-4=0$과 $2x+y-3=0$은 $y = 3-2x$이고 $x-2(3-2x)-4=0$인 곳, 즉 $(2,-1)$에서 만난다. 따라서 $a=2$, $b=-1$로 잡아 $x = X+2$, $y = Y-1$로 놓는다. 그러면 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \mathrm{d}Y/\mathrm{d}X$이고

$$x-2y-4 = (X+2)-2(Y-1)-4 = X-2Y,$$
$$2x+y-3 = 2(X+2)+(Y-1)-3 = 2X+Y,$$

이므로 상수항이 사라진다.

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{X-2Y}{2X+Y}.$$

이는 (i)과 같은 꼴이므로 $Y = XV$로 놓는다.

$$V+X\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}X} = \frac{1-2V}{2+V} \quad\Longrightarrow\quad X\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}X} = \frac{1-2V-V(2+V)}{2+V} = \frac{1-4V-V^2}{2+V}.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}(1-4V-V^2) = -2(2+V)$이므로 이번에도 분자는 분모의 도함수의 상수배이다. 따라서

$$\int \frac{2+V}{1-4V-V^2}\,\mathrm{d}V = \int \frac{1}{X}\,\mathrm{d}X \quad\Longrightarrow\quad -\tfrac{1}{2}\ln\left|1-4V-V^2\right| = \ln|X| + C,$$

이고, 앞에서와 같이 $X^2(1-4V-V^2) = K$, 즉

$$X^2-4XY-Y^2 = K.$$

점 $(1,1)$은 $X=-1, Y=2$에 대응하므로 $K=1-4(-1)(2)-4=5$이다. x와 y로 되돌리면

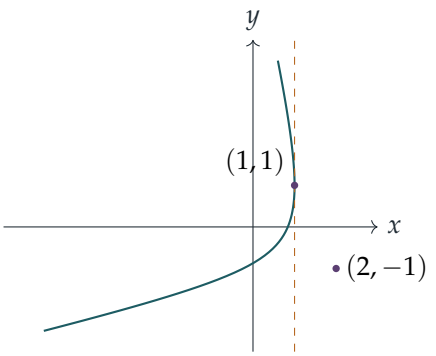
$$(x-2)^2-4(x-2)(y+1)-(y+1)^2=5,$$

이고, 전개하면

$$\begin{aligned}&(x^2-4x+4)-4(xy+x-2y-2)-(y^2+2y+1)=5\\ \iff\quad&\boxed{x^2-4xy-y^2-8x+6y+6=0}\end{aligned}$$

생각해 보기 $(1,1)$에서 분모 $2x+y-3$은 0이다. 그래도 이 해가 의미가 있을까?

그렇다. 그 점에서 기울기가 무한대이므로 곡선은 $(1,1)$에서 수직 접선(vertical tangent)을 가진다. 음함수(implicit) 방정식은 곡선을 완벽하게 잘 나타낸다. 다만 그 점을 지나는 함수 $y(x)$의 그래프가 아닐 뿐이다. 달리 말하면 x가 y의 매끄러운 함수이다. x에 대한 이차방정식을 풀면 $(1,1)$을 지나는 가지(branch)에서 $x=2y+4-\sqrt{5y^2+10y+10}$이고, $5y^2+10y+10=5(y+1)^2+5>0$이므로 이 식은 모든 y에 대하여 정의되며, $y=1$에서 최댓값 $x=1$을 가진다.



그림은 $(1,1)$을 지나는 가지(청록색)가 그 점에서 수직선 $x=1$(점선)에 접하는 모습을 보여 준다. $(2,-1)$은 쌍곡선(hyperbola)의 중심이다.

검산

- 답을 음함수 미분한다. (i)에서 $2x+4y+(4x-2y)y'=0$으로부터 $y'=\dfrac{x+2y}{y-2x}$를 얻으므로 조건에 맞는다. (ii)에서 $2x-4y-8+(6-4x-2y)y'=0$으로부터 $y'=\dfrac{x-2y-4}{2x+y-3}$을 얻는다.
- 두 곡선 모두 $(1,1)$을 지난다. $1+4-1=4$이고 $1-4-1-8+6+6=0$이다.

- 컴퓨터로 각 미분방정식(differential equation)을 $(1,1)$에서부터 수치적으로 한 걸음씩 풀어 나갔을 때, 상자 안 방정식들의 좌변은 약 10^{-13}의 오차 내에서 각각 4와 0으로 유지되었다. (i)에서 $(1,1)$에서의 기울기는 -3이다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = u + x\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$에서 u를 빠뜨려 잘못된 변수분리형 방정식을 얻는 것.
- (ii)에서 조건을 잘못된 좌표계에서 적용하는 것. 점 $(1,1)$은 $(1,1)$이 아니라 $(X,Y) = (-1,2)$가 된다.
- u에 대해 부분분수를 쓰려고 하는 것. $1 + 4u - u^2$의 근은 $2 \pm \sqrt{5}$여서 계산이 지저분해지는 반면, 피적분함수는 이미 f'/f 꼴이다.

STEP 너머

우변이 y/x에만 의존하는 방정식을 동차(homogeneous) 방정식이라 하고, (ii)에서처럼 원점을 옮기는 것은 일차함수의 비에 대한 표준적인 기법이다. 여기 나온 두 방정식은 완전(exact) 방정식이기도 하다. (i)을 $(2y + x)\,\mathrm{d}x - (y - 2x)\,\mathrm{d}y = 0$으로 쓰면 두 계수가 교차 편미분 판정법을 만족하고, 보존량 $x^2 + 4xy - y^2$를 바로 읽어 낼 수 있다. 완전 방정식, 적분인자(integrating factor), 선형계의 상 초상(phase portrait)(쌍곡선들의 진짜 정체가 바로 이것이다)은 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.