풀이

STEP II 2014, 문제 4

순수수학 • 치환적분

> **STEP II 2014, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q4

핵심 아이디어

치환(substitution) $u = 1/x$는 구간 $[1/b, b]$의 양 끝을 서로 맞바꾸므로, 적분 I를 같은 범위에서의 적분으로 다시 바꾸어 놓는다. 새로운 피적분함수(integrand)가 원래 피적분함수의 부호만 바뀐 것이라면 $I = -I$를 얻는다. 원래 것과 밀접하게 관련된 함수라면, I의 두 표현을 더했을 때 훨씬 적분하기 쉬운 피적분함수를 얻을 수 있다. 마지막 소문항에서는 $[0, \infty)$가 자기 자신으로 옮겨지도록 $u = a^2/x$로 같은 기법을 쓰면, 구하려는 적분에 대한 방정식을 얻게 되고 이를 풀면 된다.

풀이

소문항 (i)

이 적분을 I라 하자. $x = 1/u$로 놓으면 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$이고 $\ln x = -\ln u$이다. $x = 1/b$일 때 $u = b$이고, $x = b$일 때 $u = 1/b$이다. 또한

$$(a^2 + x^2)(a^2x^2 + 1) = \left(a^2 + \frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{a^2}{u^2} + 1\right) = \frac{(a^2u^2 + 1)(a^2 + u^2)}{u^4}.$$

따라서

$$\begin{aligned} I &= \int_b^{1/b} \frac{\frac{1}{u}\,(-\ln u)}{(a^2u^2 + 1)(a^2 + u^2)/u^4}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_b^{1/b} \frac{u \ln u}{(a^2 + u^2)(a^2u^2 + 1)}\,\mathrm{d}u = -\int_{1/b}^{b} \frac{u \ln u}{(a^2 + u^2)(a^2u^2 + 1)}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

마지막 적분은 더미 변수(dummy variable)의 이름만 바꾼 I 그 자체이다. 따라서 $I = -I$이고, 이로부터 요구한 대로 $I = 0$을 얻는다. ($b > 0$이므로 피적분함수는 $[1/b, b]$에서 연속이고, 따라서 I는 유한한 값이며 이 단계는 타당하다.)

소문항 (ii)

이 적분을 I라 하자. 같은 치환을 하면 $\frac{\mathrm{d}x}{x} = u \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}u}{u}$이고, 적분 구간의 끝은 앞에서와 마찬가지로 서로 바뀐다.

$$I = \int_b^{1/b} \arctan\left(\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u = \int_{1/b}^{b} \frac{\arctan(1/u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

이번에는 부호가 단순히 뒤집히지 않으므로, 이 표현을 원래 표현에 더한다.

$$2I = \int_{1/b}^{b} \frac{\arctan u + \arctan(1/u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

생각해 보기 $u > 0$일 때 $\arctan u + \arctan(1/u)$의 값은 무엇인가?

$u > 0$에 대하여 $\theta = \arctan u$라 하면 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이고 $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta = 1/u$이다. $\frac{\pi}{2} - \theta$ 또한 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에 속하므로, 이것은 $\arctan(1/u)$이다. 따라서 모든 $u > 0$에 대하여 $\arctan u + \arctan(1/u) = \frac{\pi}{2}$이다. ($u < 0$이면 합은 $-\frac{\pi}{2}$이지만, $[1/b, b]$의 모든 u는 양수이다.) 그러므로

$$2I = \frac{\pi}{2}\int_{1/b}^{b} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\pi}{2}(\ln b - \ln(1/b)) = \pi \ln b,$$

이므로 요구한 대로 $I = \dfrac{\pi \ln b}{2}$이다. 이 결과는 $b > 1$이든 $0 < b < 1$이든 성립한다.

소문항 (iii)

$J = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 + x^2)^2}$라 하자. 피적분함수가 연속이고 x가 클 때 $1/x^4$ 이하이므로, 이 적분은 수렴(converge)한다. $(0, \infty)$를 자기 자신으로 옮기면서 $a^2 + x^2$를 $a^2 + u^2$의 상수배로 바꾸는 치환을 원하므로, $u = a^2/x$, 즉 $k = a^2$으로 잡는다. 그러면 $x = a^2/u$, $\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{u^2}\,\mathrm{d}u$이고, $x \to 0^+$은 $u \to \infty$에 대응하며,

$$a^2 + x^2 = a^2 + \frac{a^4}{u^2} = \frac{a^2(u^2 + a^2)}{u^2}.$$

따라서

$$J = \int_{\infty}^{0} \frac{u^4}{a^4(a^2 + u^2)^2}\left(-\frac{a^2}{u^2}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{a^2}\int_0^{\infty} \frac{u^2}{(a^2 + u^2)^2}\,\mathrm{d}u.$$

이제 분자를 $u^2 = (a^2 + u^2) - a^2$으로 쓰면

$$\frac{u^2}{(a^2 + u^2)^2} = \frac{1}{a^2 + u^2} - \frac{a^2}{(a^2 + u^2)^2}.$$

두 부분 모두 $(0, \infty)$에서의 적분이 수렴하므로 적분을 나눌 수 있다. 주어진 결과를 이용하면

$$J = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\pi}{2a} - a^2 J\right) = \frac{\pi}{2a^3} - J.$$

그러므로 $2J = \dfrac{\pi}{2a^3}$이고, 요구한 대로

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3},$$

이다.

검산

- (ii)에서 $b = 1$이면 길이가 0인 구간이 되며, 실제로 $\frac{\pi}{2}\ln 1 = 0$이다. b를 $1/b$로 바꾸면 적분 구간의 끝이 서로 바뀌므로 적분의 부호가 바뀌어야 하고, $\ln(1/b) = -\ln b$가 이와 일치한다.
- (iii)에서 답은 올바르게 스케일되어야 한다. $x = at$로 놓으면 $J = a^{-3}\int_0^\infty (1+t^2)^{-2}\,\mathrm{d}t$이므로, J는 a^{-3}의 상수배여야 한다. $a = 1$일 때 치환 $x = \tan\theta$를 하면 $\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}$가 되어 결과와 일치한다.
- 수치적으로, $b = 2$일 때 (ii)의 적분은 $1.08879\ldots = \frac{\pi}{2}\ln 2$이다. (i)의 적분은 a와 b를 무작위로 여러 번 골라도 (소수점 아래 여러 자리까지) 0으로 계산된다.

흔한 실수

- $u = 1/x$가 적분 구간의 끝도 뒤바꾼다는 것을 잊는 실수. $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u/u^2$에서 나오는 음의 부호와 적분 구간의 끝이 바뀌는 것을 모두 추적해야 한다.
- $\arctan u + \arctan(1/u) = \frac{\pi}{2}$를 쓰면서 이것이 $u > 0$일 때만 성립한다는 것을 밝히지 않는 실수.
- (iii)에서 $\frac{1}{a^2}\int_0^\infty \frac{u^2}{(a^2+u^2)^2}\,\mathrm{d}u$를 얻은 뒤, 이것을 J와 주어진 적분으로 다시 쓸 수 있다는 것을 알아채지 못하고 멈추는 실수.

STEP 너머

정의역의 대칭성을 이용하여 적분을 그 자신과 연결하는 것은 흔히 쓰이는 기법이다. 이 기법은 복소 경로적분(contour integration)이나 $\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$ 같은 적분에서 다시 등장한다. (iii)의 적분들은 또한 어떤 일반적인 적분족에서 나온다. $\int_0^\infty (\lambda+x^2)^{-1}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\lambda^{-1/2}$를 λ에 대하여 미분하면 같은 답을 곧바로 얻는다("적분 기호 아래에서의 미분(differentiation under the integral sign)"). 이와 같은 단계와 이상적분(improper integral)을 다루는 방법이 언제 허용되는지는 실해석학(real analysis) 강의에서 설명한다. Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.