풀이

STEP II 2014, 문제 3

순수수학 • 접선과 포락선

> **STEP II 2014, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q3

핵심 아이디어

점 P에서의 접선(tangent)은 기울기(gradient)가 y'이고 y절편(y-intercept)이 $y - xy'$인 직선일 뿐이므로, 소문항 (i)을 이용하면 거리가 일정하다는 성질을 미분방정식(differential equation)으로 바꿀 수 있다. 이 방정식을 미분하면 인수 y''이 나타나고, 곱이 0이 되는 두 가지 경우에서 두 종류의 곡선, 즉 직선($y'' = 0$)과 원이 나온다. 소문항 (iii)은 이 조각들을 매끄럽게 이어 붙이라고 요구한다.

풀이

소문항 (i)

$m = 0$이면 직선은 $y = c$이고 거리는 분명히 c이므로, $m \neq 0$이라고 하자. 이 직선은 y축과 $A = (0, c)$에서 만나고, x축과 예각 θ를 이루며, 여기서 $\tan\theta = |m|$이다. O에서 직선에 내린 수선의 발(foot of the perpendicular)을 N이라 하자. 직각삼각형(right-angled triangle) ONA에서 직선과 y축이 A에서 이루는 각은 $\frac{\pi}{2} - \theta$이므로 각 AON은 θ이고,

$$ON = OA\cos\theta = \frac{c}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{c}{\sqrt{1+m^2}} = c(m^2+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

(같은 값은 x에 대한 이차식(quadratic) $x^2 + (mx+c)^2$을 최소화해도 얻는다. 이 이차식은 $x = -\frac{mc}{1+m^2}$에서 최솟값 $\frac{c^2}{1+m^2}$을 가진다.)

$c < 0$이면 원점에 대하여 대칭이동(reflecting in the origin)하면 O로부터의 거리는 변하지 않은 채 직선이 $y = mx + |c|$로 바뀌므로, 일반적으로 거리는 $|c|(1+m^2)^{-\frac{1}{2}}$이다.

소문항 (ii)

$P = (x, y)$에서 접선은 기울기가 y'이고 P를 지나므로, 좌표 (X, Y)로 나타낸 방정식은

$$Y = y'X + (y - xy').$$

이것은 $m = y', c = y - xy'$인 소문항 (i) 꼴의 직선이다(가정에 의해 수직선이 아니다). 따라서 O로부터의 거리는

$$a = \frac{|y - xy'|}{\sqrt{1 + (y')^2}},$$

이고, 양변을 제곱하면

$$(y - xy')^2 = a^2(1 + (y')^2). \qquad (*)$$

미분하기. 여기서 a는 상수이고 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y - xy') = y' - y' - xy'' = -xy''$이다. 따라서 $(*)$를 미분하면

$$2(y - xy')(-xy'') = 2a^2y'y'', \qquad \text{즉,} \qquad y''[\,x(y - xy') + a^2y'\,] = 0.$$

> **생각해 보기** 곱이 0이라는 사실이 어떻게 곡선에 대한 두 개의 서로 다른 경우로 바뀌는가?

각 점에서 $y'' = 0$이거나 괄호 안이 0이다. 곡선에서 $y'' = 0$인 구간에서는 곡선이 직선이고, $y'' \neq 0$인 구간에서는 괄호 안이 0이어야 한다. 두 경우를 차례로 살펴본다. ($a > 0$이라고 가정한다. $a = 0$이면 모든 접선이 O를 지나고 C는 단순히 원점을 지나는 직선이다.)

경우 1: $y'' = 0$. 그러면 $y' = m$은 상수이고, 상수 m, k에 대하여 $y = mx + k$이다. $y - xy' = k$이므로 $(*)$에 대입하면 $k^2 = a^2(1 + m^2)$이고, 따라서

$$y = mx \pm a(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}.$$

경우 2: 괄호 안이 0. 그러면 $xy - x^2y' + a^2y' = 0$이므로

$$(x^2 - a^2)\,y' = xy.$$

먼저 $x^2 \neq a^2$이다. $x = \pm a$이면 $xy = 0$에서 $y = 0$이어야 하고, $(*)$는 $a^2(y')^2 = a^2(1 + (y')^2)$이 되어 불가능하기 때문이다. 따라서 나눌 수 있다.

$$y' = \frac{xy}{x^2 - a^2}, \qquad y - xy' = \frac{y(x^2 - a^2) - x^2y}{x^2 - a^2} = \frac{-a^2y}{x^2 - a^2}.$$

둘 다 $(*)$에 대입하고 양변에 $(x^2 - a^2)^2/a^2$을 곱하면

$$\begin{aligned} a^2y^2 &= (x^2 - a^2)^2 + x^2y^2 \\ \iff \quad y^2(a^2 - x^2) &= (a^2 - x^2)^2 \\ \iff \quad (a^2 - x^2)\,(x^2 + y^2 - a^2) &= 0. \end{aligned}$$

$a^2 - x^2 \neq 0$이므로 $x^2 + y^2 = a^2$이다.

따라서 어떤 m에 대하여 $y = mx \pm a(1+m^2)^{\frac{1}{2}}$이거나 $x^2 + y^2 = a^2$이며, 이것이 보이려던 것이다. 두 곡선 모두 실제로 이 성질을 가진다. 직선들은 소문항 (i)에 의해 O로부터 거리가 a이고, 중심이 O이고 반지름이 a인 원의 모든 접선은 O로부터 거리가 a이다.

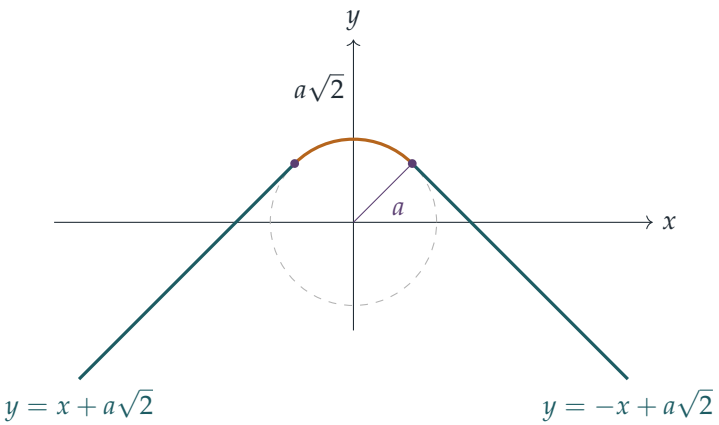
소문항 (iii)

직선 조각이 호(arc)와 만나는 점에서 C는 접선을 가져야 하므로, 그 점에서 직선의 기울기는 호의 기울기와 같아야 한다. 즉 각 직선은 호의 끝점에서 원에 그은 접선이다. 또 모든 접선은 수직선이 아니어야 하므로 호는 점 $(\pm a, 0)$에 닿으면 안 되고, C는 x에 대한 함수의 그래프이므로 원의 위쪽 절반만 또는 아래쪽 절반만 사용한다.

한 가지 예: $x^2 + y^2 = a^2$의 호 가운데 $(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}})$에서 위쪽을 지나 $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}})$까지 가는 호를 잡고, 양 끝에서의 접선으로 이어 붙인다.

$$y = \begin{cases} x + a\sqrt{2}, & x \leq -\frac{a}{\sqrt{2}}, \\ \sqrt{a^2 - x^2}, & |x| \leq \frac{a}{\sqrt{2}}, \\ -x + a\sqrt{2}, & x \geq \frac{a}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

두 직선은 경우 1의 요구대로 $m = \pm 1$이고 절편이 $a\sqrt{2} = a(1+m^2)^{\frac{1}{2}}$이다. $x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$에서 호의 기울기는 $-\frac{x}{y} = \mp 1$로 직선의 기울기와 일치하므로, 기울기는 모든 곳에서 연속(continuous)이고 유한하다.



$(\pm a, 0)$을 포함하지 않는 위쪽(또는 아래쪽) 반원(semicircle)의 임의의 호를 양 끝의 접선으로 이어 붙여도 같은 방식으로 성립한다.

검산

- 소문항 (i)에서 $m = 0$이면 거리는 c이고, $|m| \to \infty$이면 직선이 가팔라지면서 거리가 0으로 다가간다. $(0, c)$를 지나는 직선이므로 당연히 그래야 한다.
- 원 위에서 $y' = -x/y$이면 $y - xy' = a^2/y$이고, $(*)$의 양변은 모두 a^4/y^2이다.
- $a = 1$인 예에 대하여 $x = -5$와 $x = 5$ 사이의 1001개 점에서 O와 접선 사이의 거리를 컴퓨터로 확인했더니 매번 1이었다. 예를 들어 $x = 2$에서 접선은 $y = -x + \sqrt{2}$이고 거리는 $\sqrt{2}/\sqrt{2} = 1$이다.

흔한 실수

- 미분한 방정식을 y''으로 나누어 직선 해를 잃어버리는 것.
- a가 상수라는 것을 잊거나, xy'을 미분한 결과를 $y' + xy''$이 아니라 y'으로 쓰는 것.
- 소문항 (iii)에서 직선과 호를 꺾인 점으로 이어 붙이거나, 양 끝에서 접선이 수직인 반원 전체를 사용하는 것.

STEP 너머

여기서 원은 직선족 $y = mx \pm a\sqrt{1 + m^2}$의 **포락선**(envelope)이고, $(*)$는 클레로 방정식(Clairaut equation) $y = xy' + f(y')$이다. 이 방정식의 일반해(general solution)는 직선족이고, **특이해**(singular solution)는 그 포락선이다. $(*)$를 y'에 대한 이차방정식으로 보면 판별식(discriminant)은 $4a^2(x^2 + y^2 - a^2)$이므로, 두 가지 기울기 선택은 정확히 원 위에서 하나로 합쳐진다. 그래서 소문항 (iii)에서처럼 그곳에서 해들을 이어 붙일 수 있으며, 해의 유일성(uniqueness)이 성립하지 않는다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 1계 방정식의 해의 존재성과 유일성을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.