풀이

STEP II 2014, 문제 2

순수수학 • 적분 부등식

> **STEP II 2014, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q2

이 문제는 *Beyond STEP*의 3.7 절 $\pi^2 \leq 10$에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/wirtinger.html

핵심 아이디어

$(*)$의 양변은 구체적인 f가 주어지면 정확히 계산할 수 있는 적분(integral)이다. 따라서 양 끝에서 0이 되는 함수는 모두 $(*)$를 π가 들어간 수들 사이의 부등식(inequality)으로 바꾸어 준다. 실제로 정해야 할 것은 $f(0) = f(\pi) = 0$이 되도록 자유 상수를 고르는 일뿐이다. 끝점에서 0이 **되지 않는** 함수는 천천히 변하면서도 값이 클 수 있으며, 끝점 조건이 중요한 까닭이 바로 여기에 있다.

풀이

소문항 (i)

$f(x) = \sin nx$이면 $f'(x) = n\cos nx$이다. $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$와 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$를 이용하면

$$\int_0^{\pi} \sin^2 nx\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left[x - \tfrac{1}{2n}\sin 2nx\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$
$$\int_0^{\pi} n^2\cos^2 nx\,\mathrm{d}x = \tfrac{n^2}{2}\left[x + \tfrac{1}{2n}\sin 2nx\right]_0^{\pi} = \frac{n^2\pi}{2},$$

이다. 정수 n에 대하여 $\sin 2n\pi = 0$이기 때문이다. $n \geq 1$이므로 $n^2 \geq 1$이고, 따라서 $\frac{\pi}{2} \leq \frac{n^2\pi}{2}$이 되어 $(*)$가 성립한다(등호는 정확히 $n = 1$일 때 성립한다).

반례(counterexample). $f(x) = \pi - x$를 생각하자. 이 함수는 $f(\pi) = 0$이지만 $f(0) =$

$\pi \neq 0$이다. 이때 $f'(x) = -1$이고

$$\int_0^\pi (\pi - x)^2 \,\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{1}{3}(\pi - x)^3\right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{3}, \qquad \int_0^\pi 1 \,\mathrm{d}x = \pi.$$

$\pi^2 > 3$이므로 $\frac{\pi^3}{3} > \pi$이고, 따라서 $(*)$는 성립하지 않는다. 마찬가지로 $f(x) = x$는 $f(0) = 0$이지만 $f(\pi) = \pi \neq 0$이며, 같은 두 적분값 $\frac{\pi^3}{3} > \pi$를 주므로 역시 $(*)$가 성립하지 않는다. 그러므로 한쪽 끝점 조건이 성립하더라도 다른 쪽 조건을 뺄 수는 없다.

소문항 (ii)

이차함수. $f(0) = c = 0$이고 $f(\pi) = a\pi^2 + b\pi = 0$이어야 하므로 $b = -a\pi$이고 $f(x) = ax(x - \pi)$이다. $a = 0$으로 잡으면 $f \equiv 0$이 되어 쓸모없는 부등식 $0 \leq 0$을 얻으므로 $a \neq 0$으로 잡는다. f에 a를 곱하면 $(*)$의 양변에 모두 a^2이 곱해지므로 $a = -1$로 잡아도 된다.

$$f(x) = x(\pi - x), \qquad f'(x) = \pi - 2x.$$

$x = \frac{\pi}{2} + u$로 치환하면 두 적분이 모두 대칭적인 꼴이 된다. 즉 $f = \frac{\pi^2}{4} - u^2$, $f' = -2u$이고 u는 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 위를 움직인다. $h = \frac{\pi}{2}$로 두면

$$\int_0^\pi f^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-h}^{h} \left(h^2 - u^2\right)^2 \mathrm{d}u = 2\left(h^5 - \tfrac{2}{3}h^5 + \tfrac{1}{5}h^5\right) = \frac{16h^5}{15} = \frac{\pi^5}{30},$$
$$\int_0^\pi f'^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-h}^{h} 4u^2 \,\mathrm{d}u = \frac{8h^3}{3} = \frac{\pi^3}{3}.$$

따라서 $(*)$로부터 $\dfrac{\pi^5}{30} \leq \dfrac{\pi^3}{3}$을 얻고, 양수 $\frac{\pi^3}{30}$으로 나누면

$$\pi^2 \leq 10,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

삼각함수. 이번에는 $f(0) = q + r$이고 $f(\pi) = p\sin\frac{\pi}{2} + q\cos\frac{\pi}{2} + r = p + r$이다. 두 값이 모두 0이 될 필요충분조건은 $p = q = -r$이다. 이번에도 $r = 0$이면 $f \equiv 0$이 되고, 상수배는 상관없으므로 $r = -1$로 잡는다.

$$f(x) = \sin\tfrac{1}{2}x + \cos\tfrac{1}{2}x - 1, \qquad f'(x) = \tfrac{1}{2}\left(\cos\tfrac{1}{2}x - \sin\tfrac{1}{2}x\right).$$

> **생각해 보기** 교차항이 어지럽게 늘어나지 않도록 f를 제곱하려면 어떻게 해야 할까?

$s = \sin\frac{1}{2}x$, $c = \cos\frac{1}{2}x$로 두고 f를 $(s + c) - 1$로 묶는다. 그러면 $(s + c)^2 = 1 + 2sc = 1 + \sin x$이므로

$$f^2 = (s + c)^2 - 2(s + c) + 1 = 2 + \sin x - 2\sin\tfrac{1}{2}x - 2\cos\tfrac{1}{2}x.$$

$\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = 2$, $\int_0^\pi \sin\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \left[-2\cos\frac{1}{2}x\right]_0^\pi = 2$, $\int_0^\pi \cos\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \left[2\sin\frac{1}{2}x\right]_0^\pi = 2$를 이용하면

$$\int_0^\pi f^2\,\mathrm{d}x = 2\pi + 2 - 4 - 4 = 2\pi - 6.$$

같은 방법으로 $(c-s)^2 = 1 - \sin x$이므로

$$\int_0^\pi f'^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^\pi (1-\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi-2}{4}.$$

이제 $(*)$는 $2\pi - 6 \le \frac{1}{4}(\pi - 2)$, 즉 $8\pi - 24 \le \pi - 2$를 뜻하므로

$$7\pi \le 22, \qquad \text{즉} \qquad \pi \le \frac{22}{7}.$$

비교. 두 번째 부등식의 양변을 제곱하면(양변이 모두 양수이다)

$$\pi^2 \le \frac{484}{49} < \frac{490}{49} = 10.$$

따라서 삼각함수를 택한 쪽이 더 작은 상계(upper bound) $\pi^2 \le \frac{484}{49} \approx 9.878$을 주며, 그러므로 더 좋은 근삿값이다. 둘 다 상계이므로 더 작은 쪽이 참값에 더 가깝다.

검산

- 참값은 $\pi^2 \approx 9.8696$으로, 당연히 10과 $\frac{484}{49} \approx 9.8776$보다 모두 작다.
- 수치로 확인하면, 삼각함수 f에 대하여 $(*)$의 양변은 $2\pi - 6 \approx 0.2832$와 $\frac{1}{4}(\pi - 2) \approx 0.2854$로 매우 가깝다. 그래서 $\pi \le \frac{22}{7}$이라는 부등식이 이렇게 정밀한 것이다. 이차함수에 대해서는 양변이 $\frac{\pi^5}{30} \approx 10.20$과 $\frac{\pi^3}{3} \approx 10.34$이다.
- 소문항 (i)에서 $n = 1$일 때 등호가 성립하므로 $\sin x$는 $(*)$의 극단적인 경우이다. 삼각함수 f는 모양이 $\sin x$에 가깝고 $x(\pi - x)$는 그보다 조금 덜 가깝다. 이것이 어느 부등식이 더 좋은지를 설명해 준다.

흔한 실수

- $f = 1$처럼 **두** 끝점 조건을 모두 어기는 반례를 고르는 것. 이것도 올바른 반례이지만, $\pi - x$와 x는 각 조건이 따로따로 필요하다는 더 많은 사실을 보여 준다.
- 삼각함수의 경우 f^2을 적분할 때 $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = 2$(0이 아니다)임을 잊는 것.
- 10이 더 "깔끔한" 수라서 더 좋은 근삿값이라고 말하는 것. 둘 다 상계이므로 더 작은 쪽이 이긴다.

STEP 너머

부등식 $(*)$는 비르팅거 부등식(Wirtinger's inequality)이며, 최선의 상수 1은 $\sin x$에서 나온다. 이 상수는 $f(0) = f(\pi) = 0$인 조건에서 $-f'' = \lambda f$의 가장 작은 고윳값(eigenvalue)이다. 골라 놓은 함수로 $(*)$를 시험해 보는 것은 레일리-리츠 방법(Rayleigh–Ritz method)으로, 이 방법은 언제나 그 고윳값의 상계를 주며 공학자들이 진동수를 추정하는 방법의 바탕이 된다. 푸리에 급수(Fourier series)를 쓰면 $(*)$ 자체를 깔끔하게 증명할 수 있다. 그 배경이 되는 해석학은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를, 고윳값 쪽은 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.