풀이

STEP II 2014, 문제 11

역학 • 원운동

> **STEP II 2014, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q11

핵심 아이디어

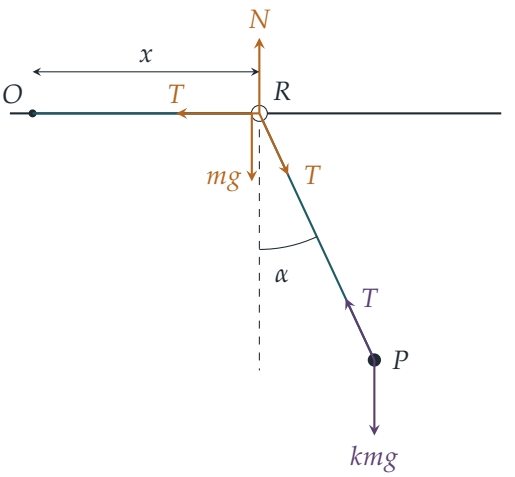
모든 것은 하나의 변수 x로 결정된다. 줄이 늘어나지 않고(inextensible) α가 고정되어 있으므로 P의 위치는 x의 간단한 함수이고, 따라서 P의 가속도의 두 성분은 모두 $\ddot{x}$의 상수배이다. 그러면 미지수는 $\ddot{x}$와 T 두 개뿐인데 운동 방정식(equations of motion)은 세 개(P에 대한 두 개, 고리에 대한 수평 방향 하나)가 나온다. 이러한 과결정계(overdetermined system)는 특별한 조건이 성립할 때에만 모순이 없고, 바로 이 양립 조건(consistency condition)이 α와 k를 묶어 준다.

풀이

모형. 고리와 P는 질점이고, 줄은 가볍고 늘어나지 않으며, 고리와 레일은 매끄럽다. 고리가 매끄러우므로 장력(tension) T는 줄의 두 부분에서 같다. O를 원점으로 하고, x축은 레일을 따라 O에서 고리 쪽을 향하는 방향으로, y축은 연직 위쪽으로 잡는다.

P의 좌표. O에서 고리까지의 줄은 레일을 따라 놓여 있고 길이가 x이므로, 고리에서 P까지의 줄의 길이는 $L - x$이다. 이 부분은 연직 아래 방향과 각 α를 이루고, P는 고리를 기준으로 O의 반대쪽에 매달려 있다(이 선택이 옳다는 것은 소문항 (i)의 끝에서 보인다). 따라서

$$P = (x + (L - x)\sin\alpha,\ -(L - x)\cos\alpha).$$



소문항 (i)

α가 상수임을 이용하여 P의 좌표를 두 번 미분하면

$$\ddot{x}_P = \ddot{x}\,(1-\sin\alpha), \qquad \ddot{y}_P = \ddot{x}\cos\alpha.$$

P에 작용하는 힘은 아래 방향의 무게 kmg와 줄을 따라 고리 쪽으로 작용하는 장력 T이며, 장력의 성분은 수평 방향으로 $-T\sin\alpha$, 연직 방향으로 $+T\cos\alpha$이다.

P, 연직 방향: $km\,\ddot{y}_P = T\cos\alpha - kmg$, 즉

$$km\ddot{x}\cos\alpha = T\cos\alpha - kmg,$$

이고, 이것이 구하려던 식이다.

P, 수평 방향:

$$km\ddot{x}\,(1-\sin\alpha) = -T\sin\alpha. \tag{1}$$

고리, 수평 방향. 고리는 양쪽에서 줄의 힘을 받는다. 레일을 따라 놓인 부분은 고리를 O 쪽으로 크기 T의 힘으로 당기고, P로 내려가는 부분은 O에서 멀어지는 방향으로 수평 성분 $T\sin\alpha$의 힘으로 당긴다. 고리의 무게와 레일의 수직항력(normal reaction)은 연직 방향이다(레일이 매끄럽기 때문이다). 따라서

$$m\ddot{x} = T\sin\alpha - T = -T(1-\sin\alpha). \tag{2}$$

? **생각해 보기** 왜 P는 고리를 기준으로 O의 반대쪽에 있어야 할까?

만약 P가 O 쪽에 매달려 있다면 P의 x좌표는 $x-(L-x)\sin\alpha$가 되고, 두 수평 방향 방정식은 $km\ddot{x}(1+\sin\alpha) = T\sin\alpha$와 $m\ddot{x} = -T(1+\sin\alpha)$가 된다. 첫째 식에서 $\ddot{x} \geq 0$이고

둘째 식에서 $\ddot{x} \leq 0$이므로 $\ddot{x} = 0$이고 $T = 0$이다. 그런데 그러면 연직 방향 방정식에서 $0 = -kmg$가 되어 불가능하다. 따라서 그 배치로는 α를 일정하게 유지하며 움직일 수 없고, 위의 좌표가 올바른 것이다.

소문항 (ii)

먼저 $T \neq 0$이다. $T = 0$이면 (2)에서 $\ddot{x} = 0$이고, 연직 방향 방정식에서 $0 = -kmg$가 되어 모순이기 때문이다.

(2)에서 $m\ddot{x} = -T(1 - \sin\alpha)$이다. 이것을 (1)에 대입하면

$$k(-T(1 - \sin\alpha))(1 - \sin\alpha) = -T\sin\alpha.$$

$-T \neq 0$으로 나누면

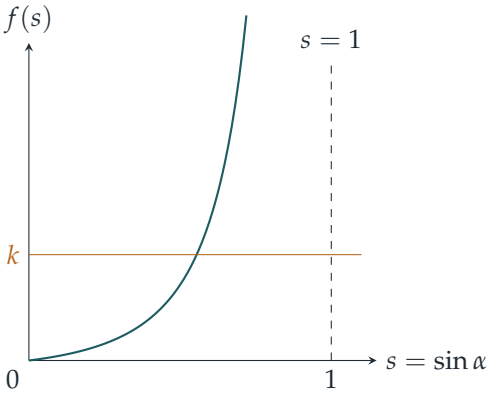
$$\frac{\sin\alpha}{(1 - \sin\alpha)^2} = k,$$

이고, 이것이 구하려던 식이다. (α가 예각이므로 $0 < \sin\alpha < 1$이고, 따라서 $(1 - \sin\alpha)^2$으로 나누어도 문제가 없다.)

모든 k가 가능하다. $s = \sin\alpha$로 두고 $0 < s < 1$에서 $f(s) = \dfrac{s}{(1-s)^2}$로 정의하자. 이 범위는 $\alpha \neq 0$인 예각 α 전체에 정확히 대응한다. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$f'(s) = \frac{(1-s)^2 + 2s(1-s)}{(1-s)^4} = \frac{1+s}{(1-s)^3} > 0,$$

이므로 f는 순증가한다. 또한 $s \to 0^+$일 때 $f(s) \to 0$이고 $s \to 1^-$일 때 $f(s) \to \infty$이며, f는 연속이다. 따라서 f는 모든 양수 값을 정확히 한 번씩 취하고, 각 $k > 0$에 대하여 조건을 만족하는 예각 α가 정확히 하나 존재한다.



수평선 $y = k$의 높이가 얼마이든, 이 직선은 곡선과 정확히 한 번 만난다.

소문항 (iii)

이제 (2)와 연직 방향 방정식을 이용하여 T를 소거한다. (2)에서 $T = -\dfrac{m\ddot{x}}{1-\sin\alpha}$이다. 이것을 연직 방향 방정식에 대입하고 m으로 나누면

$$k\ddot{x}\cos\alpha = -\frac{\ddot{x}\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - kg \quad\Longrightarrow\quad \ddot{x}\cos\alpha\left(k + \frac{1}{1-\sin\alpha}\right) = -kg.$$

이제 소문항 (ii)를 이용하여 괄호 안의 k를 바꾸면

$$k + \frac{1}{1-\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha + (1-\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)^2} = \frac{1}{(1-\sin\alpha)^2}.$$

따라서 $k(1-\sin\alpha)^2 = \sin\alpha$를 한 번 더 이용하면

$$\ddot{x} = -\frac{kg(1-\sin\alpha)^2}{\cos\alpha} = -\frac{g\sin\alpha}{\cos\alpha} = -g\tan\alpha,$$

이다. 이것이 구하려던 결과이다.

덤으로 $T = -\dfrac{m\ddot{x}}{1-\sin\alpha} = \dfrac{mg\tan\alpha}{1-\sin\alpha} > 0$이므로, 모형에서 요구하는 대로 줄은 실제로 팽팽하다.

검산

- $k = 1$이면 조건 $s = (1-s)^2$에서 $\sin\alpha = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) \approx 0.382$이므로 $\alpha \approx 22.46°$이고 $\ddot{x} \approx -0.413g$이다. 이를 (1), (2)와 연직 방향 방정식에 대입하면 세 식이 모두 성립한다.
- 두 변수(x와 줄의 각)에 대한 전체 운동을 이 각에서 고리가 움직이는 상태로 시작하여 수치적으로 시뮬레이션했다. 각은 10^{-10} rad 이내로 일정하게 유지되었고, 고리는 정확히 $g\tan\alpha$로 감속했다. 각을 조금 다르게 하여 시작하면 각이 곧바로 변하기 시작하므로, α의 이 특별한 값이 실제로 중요하다.
- 극한의 경우: $k \to 0$(매우 가벼운 입자)이면 $\alpha \to 0$이고 $\ddot{x} \to 0$이다. $k \to \infty$이면 $\alpha \to 90°$이고 감속도는 한없이 커진다. 가벼운 고리를 무거운 입자가 끌어당기고 있기 때문이다.
- 부호: $\ddot{x} < 0$이므로 고리는 항상 O 쪽으로 가속된다. 이는 고리에 작용하는 수평 방향 알짜힘 $-T(1-\sin\alpha)$가 O 쪽을 향한다는 사실과 맞아떨어진다.

흔한 실수

- 고리가 줄로부터 **양쪽에서** 힘을 받는다는 사실을 잊는 것. 레일을 따라 O 쪽으로 당기는 힘이 있어야 (2)가 성립한다.

- P의 수평 방향 가속도를 $\ddot{x}$로 쓰는 것. 매달린 부분의 길이 $L - x$도 변하므로 $-\ddot{x}\sin\alpha$가 더해진다.
- 미분할 때 α를 변수로 취급하는 것. 여기서 α는 상수이며, 바로 그 덕분에 문제를 풀 수 있다.

STEP 너머

이것은 자유도(degrees of freedom)가 두 개(고리의 위치와 줄의 각)인 계이며, 문제는 그 중 하나가 고정된 채로 유지되는 특수해를 찾는다. 이는 상대 평형(relative equilibrium)의 정신과 같다. 대학 1학년 과정에서는 x와 각에 대한 라그랑지안(Lagrangian)을 세우고, 각이 일정한 운동은 여기서 찾은 α의 단 하나의 값에서만 가능하다는 것을 확인하게 된다. 자연스러운 다음 질문은 그 운동이 안정(stable)한가 하는 것이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이런 종류의 구속계(constrained system)를 잘 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.