풀이

STEP II 2014, 문제 10

역학 • 궤적의 포락선

> **STEP II 2014, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q10

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.9 절 **안전 포물선**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/safety-parabola.html

핵심 아이디어

시간을 소거하고 나면, $\sec^2\theta = 1 + \lambda^2$이므로 궤적(trajectory)의 방정식은 $\lambda = \tan\theta$에 대한 **이차식**(*quadratic*)이 된다. 점 (x, y)를 하나 고정하고, 어떤 발사각이 이 점을 지나는지 묻자. 이는 λ에 대한 이 이차방정식이 실근을 갖는지 묻는 것과 같으므로, 판별식(discriminant)이 도달 가능한 영역의 경계를 알려 준다. 마지막 부분에서는 이 경계 곡선이 O를 초점(focus)으로 하는 포물선(parabola)임이 밝혀지며, 덕분에 O로부터의 거리를 아주 쉽게 계산할 수 있다.

풀이

궤적

포사체(projectile)를 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받아 자유롭게 움직이는 입자로 모형화한다. 시간 t가 지난 뒤

$$x = ut\cos\theta, \qquad y = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

(각이 직각보다 작으므로) $\cos\theta \neq 0$이고, 따라서 $t = x/(u\cos\theta)$이다. 이를 대입하면

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta}.$$

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \lambda^2$을 이용하면 직교좌표 방정식(Cartesian equation)은

$$\boxed{y = \lambda x - \frac{gx^2}{2u^2}\left(1 + \lambda^2\right).}$$

주어진 x 위에서의 최대 높이 Y

u를 고정하고 $x > 0$도 고정한다. 이제 y는 λ만의 함수이며, 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\frac{gx^2}{2u^2}\lambda^2 - x\lambda + \left(\frac{gx^2}{2u^2} + y\right) = 0.$$

? **생각해 보기** 왜 이것을 y가 아니라 λ에 대한 방정식으로 보는가?

어떤 값 y가 이 x 위에서 나타나는 것은 정확히 그 값을 만드는 발사각이 존재할 때, 즉 이 이차방정식이 실근 λ를 가질 때이다. 따라서 판별식은 음이 아니어야 한다.

$$x^2 - 4 \cdot \frac{gx^2}{2u^2}\left(\frac{gx^2}{2u^2} + y\right) \geq 0.$$

$x^2 > 0$으로 나눈 뒤 $u^2/(2g) > 0$을 곱하면(부등호의 방향은 바뀌지 않는다)

$$\frac{u^2}{2g} \geq \frac{gx^2}{2u^2} + y \iff y \leq \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}.$$

따라서

$$\boxed{Y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}}$$

이고, 어떤 궤적도 이 x 위에서 Y보다 높이 올라가지 않는다.

또한 $\lambda > 0$인 실제 발사각으로 Y **이하의** 모든 값에 도달할 수 있음도 보여야 한다. λ의 함수로서 y는 위로 볼록한(아래로 열린) 이차함수이다. 꼭짓점은 $\lambda_0 = u^2/(gx) > 0$에 있고, 여기서 $y = Y$이다(대입하여 확인해 보라). $\lambda \geq \lambda_0$에서 y는 연속이고 감소하며, $\lambda \to \infty$일 때 $y \to -\infty$이다. 따라서 연속성(continuity)에 의해 모든 값 $y \leq Y$는 어떤 $\lambda \geq \lambda_0 > 0$에서, 즉 어떤 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$에서 얻어진다. 그러므로 요구한 대로 y의 값 전체는 구간 $y \leq Y$ 전체를 이룬다. ($x = 0$에서는 수직으로 위로 던져야 한다. 이때 y는 0부터 $u^2/(2g)$까지 변하며, 이는 다시 $Y(0)$이다.)

어느 방향으로든 발사할 수 있다면 $x < 0$인 경우는 대칭인 상황이고, Y는 x^2에만 의존하므로 같은 공식이 성립한다.

그래프와 도달 가능한 영역

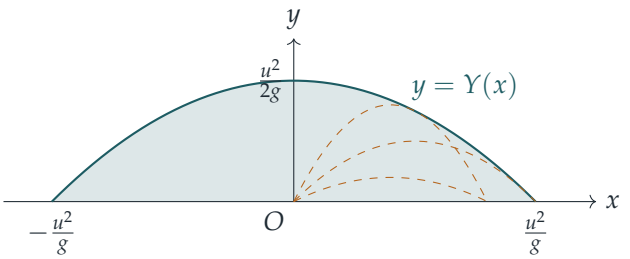
Y의 그래프는 위로 볼록한 포물선이다. 꼭짓점은 가능한 최대 높이인 $(0, u^2/2g)$에 있고, 가능한 최대 수평 도달 거리인 $x = \pm u^2/g$에서 지면과 만난다. 각각의 궤적은 모두 이 곡

선 아래에 놓이며 $\lambda = \lambda_0$에서 이 곡선에 한 번 접한다. 이 때문에 이 곡선을 흔히 **경계 포물선**(*bounding parabola*) 또는 **안전 포물선**(*parabola of safety*)이라고 부른다.

입자는 지면에 닿으면 멈춘다. $\lambda > 0$, $x > 0$인 궤적 위에서 $y \geq 0$인 점을 하나 잡자. 그 궤적은 O와 그 점 사이의 모든 x에서 지면 위에 있으므로, 입자는 착지하기 전에 실제로 그 점에 도달한다. 따라서 도달 가능한 집합은 영역

$$0 \leq y \leq \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}, \qquad |x| \leq \frac{u^2}{g},$$

이며, 아래 그림에서 색칠된 부분이다. 그림은 u^2/g를 단위로 사용하며, 점선 곡선은 궤적의 예 세 개이다.



O로부터의 가장 먼 거리

도달 가능한 임의의 점 P는 O에서 반직선 OP가 경계와 만나는 점 Q까지의 선분 위에 있다. 이 영역은 경계 포물선과 지면으로 둘러싸여 있고, 각 반직선을 따라 O와 경계 사이의 모든 점을 포함한다. 따라서 $OP \leq OQ$이고, 경계 위에서만 거리를 최대화하면 된다. 지면 위에서 가장 먼 점은 거리 u^2/g에 있다. 곡선 부분에서는 $y = Y(x)$이므로

$$\begin{aligned} OQ^2 = x^2 + Y^2 &= x^2 + \left(\frac{u^2}{2g}\right)^2 - 2 \cdot \frac{u^2}{2g} \cdot \frac{gx^2}{2u^2} + \left(\frac{gx^2}{2u^2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{u^2}{2g}\right)^2 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{gx^2}{2u^2}\right)^2 = \left(\frac{u^2}{2g} + \frac{gx^2}{2u^2}\right)^2. \end{aligned}$$

따라서 $OQ = \dfrac{u^2}{2g} + \dfrac{gx^2}{2u^2} = \dfrac{u^2}{g} - Y$이다. 다시 말해, O로부터의 거리는 직선 $y = u^2/g$로부터 아래로 잰 거리와 같다. 즉 O는 경계 포물선의 초점이고 $y = u^2/g$는 그 준선(directrix)이다. 이 거리는 Y가 가장 작을 때 가장 크며, 곡선 중 도달 가능한 부분에서 최솟값은 $x = \pm u^2/g$에서의 $Y = 0$이다. 그러므로 포사체가 도달할 수 있는 O로부터의 가장 먼 거리는

$$\boxed{\frac{u^2}{g}},$$

이고, 이는 $\theta = \frac{\pi}{4}$에서 얻어지는 최대 수평 도달 거리이다. 경계 위에서 높이 $y > 0$인 모든 점은 정확히 y만큼 더 가깝다.

검산

- $x = 0$을 대입하면 $Y = u^2/(2g)$로, 수직으로 위로 던졌을 때 도달하는 높이이다($v^2 = u^2 - 2gh$에서). $Y = 0$을 대입하면 $x = u^2/g$로, $\theta = \frac{\pi}{4}$에서 익숙한 최대 도달 거리 $u^2 \sin 2\theta / g$이다.
- $u^2/g = 10$으로 두자(예를 들어 $g = 9.8$일 때 $u = \sqrt{98}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$). $x = 4$에서 공식은 $Y = 5 - 0.8 = 4.2$를 주고, 이는 $\lambda_0 = 10/4 = 2.5$에서 얻어진다. 실제로 $2.5 \cdot 4 - \frac{1}{20} \cdot 16 \cdot 7.25 = 10 - 5.8 = 4.2$이다.
- $u = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$에 대해 많은 발사각과 시간을 컴퓨터로 탐색한 결과, O로부터 가장 먼 점은 지면 위에 있었고 그 거리는 $10.204\,\mathrm{m} = u^2/g$였다.

흔한 실수

- 판별식에서 멈추는 것. 판별식은 $y \le Y$가 **필요조건**임을 보여 줄 뿐이며, 문제는 그러한 모든 값이 지면 위로 향하는 실제 발사각으로 **달성됨**도 요구한다.
- 지면 아래의 점까지 포함하여 $y = Y$ 아래의 영역 전체를 색칠하는 것. 입자는 착지하면 멈추므로 도달 가능한 집합에는 $y \ge 0$이라는 조건도 붙는다.
- 가장 먼 점이 안전 포물선의 꼭대기라고 가정하는 것. 그 점은 O로부터 $u^2/(2g)$, 즉 도달 거리의 절반밖에 떨어져 있지 않다.

STEP 너머

경계 포물선은 궤적들로 이루어진 곡선족의 **포락선**(*envelope*), 즉 곡선족의 모든 곡선에 접하는 곡선이다. 포락선을 구하는 표준적인 방법 하나는 $F(x, y, \lambda) = 0$과 $\partial F/\partial\lambda = 0$에서 매개변수를 소거하는 것인데, 이는 바로 우리가 사용한 중근 조건이다. 에너지와의 연결도 있다. 모든 궤적은 같은 준선, 즉 직선 $y = u^2/(2g)$를 가지며, 이는 운동 에너지가 모두 위치 에너지로 바뀌었을 때의 높이이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 대학 1학년 수준에서 포물체 운동과 에너지를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.