풀이

STEP II 2014, 문제 1

순수수학 • 삼각형의 기하와 이차식

> **STEP II 2014, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q1

핵심 아이디어

$A \to P \to Q \to B$의 지그재그 경로를 따라 A에서 B까지 걸어가 보자. 세 구간의 길이는 모두 x이고, 이들을 합하면 수평 방향으로 정확히 1만큼 나아가야 하며 알짜 높이 변화는 0이어야 한다. 수평 방향과 수직 방향으로 분해(resolving)하면 $x\cos\theta$와 $x\sin\theta$가 나오고, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$을 쓰면 모르는 각이 사라진다. 그 뒤로는 모두 x에 대한 이차방정식(quadratic)과 그 판별식(discriminant)의 문제이다.

풀이

A를 원점에, B를 $(1,0)$에 두고, C는 AB 위쪽에 있게 하자. P는 A에서 C를 지나는 반직선 위에서 A로부터 거리 x인 점이고, Q는 B에서 C를 지나는 반직선 위에서 B로부터 거리 x인 점이므로

$$P = (x\cos\alpha,\ x\sin\alpha), \qquad Q = (1 - x\cos\beta,\ x\sin\beta).$$

소문항 (i)

수평 방향. $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QB}$의 수평 성분은 각각 $x\cos\alpha$, $x\cos\theta$, $x\cos\beta$이고, 이들의 합은 $AB = 1$이다. 따라서

$$x\cos\theta = 1 - x\cos\alpha - x\cos\beta,$$

이고, 이것이 첫 번째 결과이다. (좌표로 말하면, 이는 Q와 P의 x좌표의 차이다.)

수직 방향. P의 높이는 $x\sin\alpha$이고 Q의 높이는 $x\sin\beta$이므로

$$x\sin\theta = x\sin\beta - x\sin\alpha.$$

(이 값은 결코 음수가 아니다. 삼각형의 각의 합은 180°보다 작으므로 $\alpha \le \beta < 180^\circ - \alpha$이고, 이 구간에서 $\sin\beta \ge \sin\alpha$이기 때문이다. 따라서 Q는 결코 P보다 낮지 않다.)

θ 소거하기. 두 식을 제곱하여 더하고 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$을 이용하면

$$x^2 = (1 - x(\cos\alpha + \cos\beta))^2 + x^2(\sin\beta - \sin\alpha)^2.$$

우변을 전개하면 x^2의 계수는

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2 &= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta) \\ &\quad + 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \\ &= 2 + 2\cos(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

따라서 $x^2 = 1 - 2(\cos\alpha + \cos\beta)x + (2 + 2\cos(\alpha+\beta))x^2$이다. x^2을 우변으로 옮기면

$$(1 + 2\cos(\alpha+\beta))x^2 - 2(\cos\alpha + \cos\beta)x + 1 = 0, \qquad (*)$$

이 되어, 원하는 식을 얻는다.

P와 Q가 변의 연장선 위에 있는 경우. P가 AC의 연장선 위에 있더라도, 여전히 A에서 C를 지나는 반직선 위에 있고 A로부터 거리 x인 점이므로 좌표는 여전히 $(x\cos\alpha, x\sin\alpha)$이다. 마찬가지로 Q도 여전히 $(1 - x\cos\beta, x\sin\beta)$이다. 위의 유도에서는 이것 외에 아무것도 사용하지 않았다. P에서 Q로의 변위는

$$(1 - x\cos\alpha - x\cos\beta,\ x\sin\beta - x\sin\alpha),$$

이고, $PQ^2 = x^2$에서 정확히 같은 방정식 $(*)$를 얻는다. (이제 x는 AC와 BC보다 클 수 있고 $1 - x\cos\alpha - x\cos\beta$는 음수일 수 있으므로, θ는 둔각일 수 있다. 하지만 제곱하면 부호가 사라지므로 상관없다.)

소문항 (ii)

방정식 $(*)$가 일차식이 되는 것은 정확히 $1 + 2\cos(\alpha+\beta) = 0$, 즉 $\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{2}$일 때이다. $0 < \alpha + \beta < 180^\circ$이므로 가능한 경우는

$$\alpha + \beta = 120^\circ.$$

뿐이다.

그렇지 않으면 $(*)$는 진짜 이차방정식이고, 그 판별식의 4분의 1은

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\Delta &= (\cos\alpha + \cos\beta)^2 - (1 + 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta) \\ &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1 + 2\sin\alpha\sin\beta \\ &= 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta \\ &= 1 - (\sin\beta - \sin\alpha)^2,\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$와 $\cos^2\beta - 1 = -\sin^2\beta$를 이용했다.

> **?** **생각해 보기** $(\sin\beta - \sin\alpha)^2$이 1보다 작아야 하는 이유는 무엇인가?

두 각은 모두 $0°$보다 크고 $180°$보다 작으므로 $0 < \sin\alpha \le 1$이고 $0 < \sin\beta \le 1$이다. $(0,1]$에 속하는 두 수의 차는 -1보다 크고 1보다 작다. 따라서 $(\sin\beta - \sin\alpha)^2 < 1$이므로 $\Delta > 0$이고, $(*)$는 서로 다른 두 실근을 가진다.

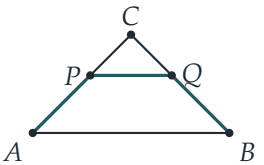
소문항 (iii)

(a) $\alpha = \beta = 45°$**.** 이때 $\cos(\alpha+\beta) = \cos 90° = 0$이고 $\cos\alpha + \cos\beta = \sqrt{2}$이므로 $(*)$는

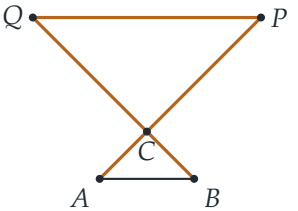
$$x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0, \qquad x = \sqrt{2} \pm 1.$$

이다. 이 삼각형은 직각이등변삼각형이고, $C = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $AC = BC = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$이다.

- $x = \sqrt{2}-1 \approx 0.414 < AC$: P와 Q는 변 위에 있고, $P = (1-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1-\frac{1}{\sqrt{2}})$, $Q = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1-\frac{1}{\sqrt{2}})$이다. 대칭성에 의해 PQ는 AB와 평행하므로 $\theta = 0$이다. 검산: $PQ = \sqrt{2}-1 = x$.
- $x = \sqrt{2}+1 \approx 2.414 > AC$: P와 Q는 각각 AC의 연장선과 BC의 연장선 위에 있고, $P = (1+\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}})$, $Q = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}})$이다. 두 연장선은 C에서 서로 교차했으므로, 이제 P가 Q의 **오른쪽**에 있다. PQ는 이번에도 수평이고, 길이는 $1+\sqrt{2} = x$이다.



$x = \sqrt{2}-1$

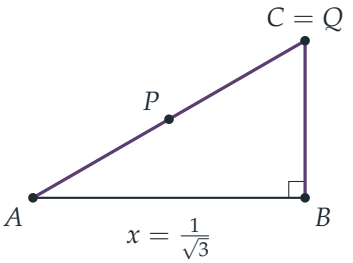


$x = \sqrt{2}+1$

(b) $\alpha = 30°$**,** $\beta = 90°$**.** 이제 $\alpha+\beta = 120°$이므로, 이는 소문항 (ii)의 일차식인 경우이다. $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $(*)$는

$$-\sqrt{3}\,x + 1 = 0, \qquad x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

가 된다. 이 삼각형은 B에서 직각이고, $BC = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $AC = \frac{2}{\sqrt{3}}$이다. 따라서 $QB = BC$는 Q가 **바로** C라는 뜻이고, $AP = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}AC$이므로 P는 AC의 중점이다. 그러면 $PQ = PC = \frac{1}{\sqrt{3}} = x$로, 마땅히 그래야 하는 대로이다. 가능한 경우는 이것뿐이다.



두 번째 근은 어디로 갔을까? $\alpha+\beta=120°$이면 직선 AC와 BC는 $60°$로 만난다. 그러면 x가 매우 클 때, 두 직선을 따라 멀리 나간 점 P와 Q 사이의 거리는 거의 정확히 x가 되어, C와 함께 거의 정삼각형을 이룬다. $\alpha+\beta\to 120°$일 때 이차방정식의 한 근은 무한대로 달아난다.

검산

- (a)에서 $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$이고, 이는 두 근의 곱 $1/(1+2\cos 90°)=1$과 일치한다.
- 임의의 삼각형, 예를 들어 $\alpha=40°$, $\beta=70°$에 대해 $(*)$를 풀고 P와 Q를 배치한 뒤 PQ를 재어 보면, 두 근 모두에 대해 그 값이 x와 같다. 우리는 여러 임의의 삼각형에 대해 약 10^{-10}의 정밀도로 이를 컴퓨터로 확인했다.
- (b)에서 $x=1/\sqrt{3}\approx 0.577$은 정확히 BC이고, AC의 중점은 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}})$로, $C=(1,\frac{1}{\sqrt{3}})$로부터의 거리가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이다.

흔한 실수

- $\cos\beta$ 항의 부호를 틀리는 것: $\overrightarrow{QB}$는 B**를 향해** 가므로, $+x\cos\beta$가 수평 성분이다. Q가 B의 왼쪽에 있더라도 마찬가지이다.
- 소문항 (ii)에서 $\alpha+\beta=240°$를 허용하는 것. 삼각형의 각의 합은 $180°$보다 작다.
- (b)에서 최고차항의 계수가 0인데 근의 공식을 쓰려 하거나, 해가 없다고 결론 내리는 것.

STEP 너머

닫힌 벡터 다각형을 성분으로 분해한 뒤 $\cos^2+\sin^2=1$로 각을 소거하는 것은 운동학(kinematics)과 링크 장치(linkage) 문제에서 쓰는 표준 기법이다. 우리의 지그재그는 간단한 3절 링크 장치이다. 이차방정식이 일차식이 될 때 "무한대로 달아나는" 근은 사영기

하학(projective geometry)을 처음 엿보게 해 준다. 사영기하학에서는 평행선이 무한원점에서 만나고, 이런 점까지 세면 이차방정식은 언제나 두 근을 가진다. 콕서터(Coxeter)와 Greitzer의 *Geometry Revisited*(기하학 다시 보기)는 이 수준에서 고전 기하학에 입문하기에 아주 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.