풀이

# STEP I 2014, 문제 9

역학 • 수평 방향의 힘을 받는 포물체

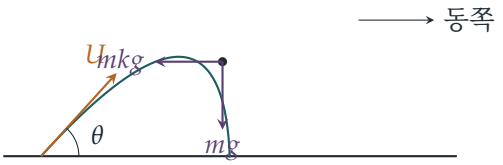
> **STEP I 2014, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q9

## 핵심 아이디어

두 힘이 모두 일정하므로 각 방향의 가속도도 일정하고, 따라서 보통의 포물체 운동(projectile motion)과 똑같이 수평 운동과 수직 운동을 따로 다룰 수 있다. 수직 운동은 서쪽으로 작용하는 힘의 영향을 전혀 받지 않는다. 새로운 점은 수평 속도가 꾸준히 줄어든다는 것이다. 그래서 입자는 어느 순간 동쪽으로의 이동을 멈추고, 그 뒤에는 서쪽으로 되돌아간다. 경로의 전체 모양은 그 순간이 최고점 및 착지 시각과 비교하여 **언제** 오는지에 달려 있다.

## 풀이

입자를 연직 평면에서 움직이는 질점(point mass)으로 모형화하고, 무게와 주어진 수평 방향의 힘 외에는 다른 힘이 작용하지 않는다고 하자. 동쪽을 $x$축, 연직 위쪽을 $y$축으로 잡고, 원점은 발사 지점으로 한다.




### 시각 $T_H$와 $T_L$

각 방향에 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙(Newton's second law)을 적용하고 $m$으로 나누면

$$\ddot{x} = -kg, \qquad \ddot{y} = -g.$$

이다. 처음 속도는 $(U\cos\theta,\ U\sin\theta)$이므로, 두 번 적분하면

$$\dot{x} = U\cos\theta - kgt, \qquad x = Ut\cos\theta - \tfrac{1}{2}kgt^2,$$
$$\dot{y} = U\sin\theta - gt, \qquad y = Ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

이다. 최고 높이에 이르는 것은 $\dot{y} = 0$일 때이고, 입자가 착지하는 것은 $t > 0$에서 $y = 0$일 때이다.

$$\boxed{T_H = \frac{U\sin\theta}{g}, \qquad T_L = \frac{2U\sin\theta}{g}.}$$

이것은 서쪽으로 작용하는 힘이 없을 때와 같은데, 그 힘에는 수직 성분이 없기 때문이다.

### $T$의 의미

주어진 시각 $T = \dfrac{U\cos\theta}{kg}$는 정확히 $\dot{x} = 0$이 되는 때이다. $T$ 이전에는 입자가 동쪽으로 움직이고, $T$ 이후에는 서쪽으로 움직인다. 따라서 시각 $T$에 입자가 아직 공중에 있다면, 그 순간이 입자가 **가장 동쪽**에 있는 때이다. 세 시각을 비교하면

$$\frac{T_H}{T} = \frac{U\sin\theta}{g}\cdot\frac{kg}{U\cos\theta} = k\tan\theta, \qquad \frac{T_L}{T} = 2k\tan\theta.$$

이다. 입자가 어디에 착지하는지도 알아 두면 도움이 된다.

$$x(T_L) = T_L\left(U\cos\theta - \tfrac{1}{2}kgT_L\right) = \frac{2U^2\sin\theta}{g}(\cos\theta - k\sin\theta) = \frac{2U^2\sin\theta\cos\theta}{g}(1 - k\tan\theta).$$

이 값은 $k\tan\theta < 1$이면 양수(출발점의 동쪽)이고, $k\tan\theta > 1$이면 음수(서쪽)이다.

**생각해 보기** 경로가 더 이상 대칭이 아니라면, 실제로는 어떤 모양일까?

가속도 $(-kg, -g)$가 일정하므로 경로는 여전히 포물선(parabola)이지만, 그 축이 기울어져 있다. 즉 아래쪽이면서 서쪽을 향하는 크기 $g\sqrt{1+k^2}$의 "중력" 아래에서 얻어지는 포물선이다. 비행의 최고점은 더 이상 포물선의 꼭짓점이 아니며, 아래의 세 경우는 가장 동쪽 지점(시각 $T$)이 어디에 오는지에 관한 것이다.

### 세 가지 경우

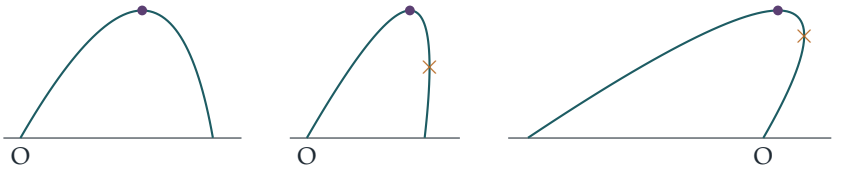
**$k\tan\theta < \frac{1}{2}$인 경우.** 이때 $T_H < T_L < T$이다. 입자는 동쪽 방향 속도가 다 없어지기 전에 착지하므로, 내내 동쪽으로 움직인다. 경로는 보통의 궤적처럼 보인다. 최고점까지 올라갔다가 내려오는데, 수평 속력이 계속 줄어들기 때문에 올라갈 때보다 더 가파르게 내려온다. 입자는 출발점의 동쪽에 착지한다.

**$\frac{1}{2} < k\tan\theta < 1$인 경우.** 이제 $T_H < T < T_L$이다. 입자는 아직 동쪽으로 움직이는 동안 최고점을 지나고, 내려오면서 시각 $T$까지 계속 동쪽으로 가는데, 이때 속도는 연직 아래 방향

이다. 그 뒤 서쪽으로 휘어 돌아오다가 착지한다. $k\tan\theta < 1$이므로 여전히 출발점의 동쪽에 착지하지만, 가장 동쪽 지점보다는 서쪽에 착지한다.

**$k\tan\theta > 1$인 경우.** 이제 $T < T_H$이다. 입자가 아직 올라가는 동안 동쪽으로의 운동이 멈추며, 그 순간 입자는 연직 위쪽으로 움직이고 있다. 이미 서쪽으로 움직이는 상태에서 최고 높이에 이르고, 내려와서 발사 지점의 **서쪽**에 착지한다.

아래 그림은 $\theta = 60°$이고 $U$와 $g$가 같을 때의 세 경우를 보여 주며, 각각 $k\tan\theta \approx 0.35, 0.6, 1.8$이다. 점은 $T_H$일 때의 최고점, 가위표는 $T$일 때의 가장 동쪽 지점을 나타내고, O는 발사 지점이다.




$k\tan\theta < \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2} < k\tan\theta < 1$ $\quad k\tan\theta > 1$

**$k\tan\theta = 1$인 경우**

이제 $T = T_H$이므로, 비행의 최고점에서 속도의 **두** 성분이 동시에 0이 되어 입자는 순간적으로 정지한다. 또 $x(T_L) = 0$이므로 입자는 발사 지점으로 돌아와 착지한다.

사실 이 운동은 직선을 따라 일어난다. $\tan\theta = 1/k$일 때 처음 속도 $U(\cos\theta, \sin\theta)$는 $(k, 1)$의 양의 실수배이고, 가속도 $(-kg, -g) = -g(k, 1)$는 정확히 반대 방향을 향한다. 가속도가 일정하고 속도와 정반대 방향인 입자는 직선 위를 움직인다. 입자는 발사 방향의 직선을 따라 $g\sqrt{1+k^2}$의 비율로 감속하며 올라가다가 시각 $T_H$에 멈추고, 같은 직선을 따라 곧장 미끄러져 내려와 시각 $T_L = 2T_H$에 출발한 지점에 착지한다. 이는 식으로도 확인할 수 있다. $k = \cot\theta$이면

$$x\tan\theta = Ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2 = y \quad \text{모든} t,$$

에 대하여 성립하므로, 입자는 직선 $y = x\tan\theta$를 결코 벗어나지 않는다.

## 검산

- $k \to 0$으로 두면 $T \to \infty$가 되므로 항상 첫 번째 경우에 해당하고, $x(T_L)$는 익숙한 수평 도달 거리 $U^2\sin 2\theta/g$가 된다.
- 착지 위치 $\frac{2U^2\sin\theta\cos\theta}{g}(1 - k\tan\theta)$는 정확히 $k\tan\theta = 1$에서 부호가 바뀌며, 이는 두 번째 경우와 세 번째 경우의 경계와 일치한다.
- $U = g = 1, \theta = 60°, k = 0.45$이면 입자는 $x \approx 0.191$에 착지하지만, $T_H \approx 0.87$과 $T_L \approx 1.73$ 사이인 시각 $T \approx 1.11$에 $x = \frac{\cos^2\theta}{2k} \approx 0.278$까지 이르므로, 착지하기 전에 실

제로 되돌아온다. 운동을 단계별로 수치적분(numerical integration)한 결과도 세 시각과 착지 지점 모두와 일치한다.

## 흔한 실수

- 서쪽으로 작용하는 힘이 수직 운동을 바꾸게 하는 것. $T_H$와 $T_L$에는 $k$가 전혀 들어 있지 않다.
- 최고점이 경로의 "한가운데"라고 가정하는 것. 수평 방향의 힘이 있으면 경로는 기울어진 포물선이므로, 최고점과 가장 동쪽 지점은 서로 다르다.
- 두 번째 경우를 입자가 출발점의 서쪽에 착지하는 것처럼 그리는 것. 입자가 되돌아오기는 하지만, $k\tan\theta < 1$이므로 그만큼 멀리 오지는 않는다.

## STEP 너머

어느 방향이든 일정한 가속도는 언제나 포물선을 만든다. 여기서는 유효 중력이 단지 기울어져 있을 뿐이며, 좌표축을 그 방향에 맞추어 회전시키면 문제는 다시 보통의 포물체 운동이 된다. 힘에 맞추어 좌표를 고르는 이 아이디어는 대학 1학년 역학의 핵심이며, 균일한 전기장 속의 대전 입자도 꼭 이와 같이 행동하는데, 이 역시 1학년 역학의 중심 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 아이디어를 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.