풀이

STEP I 2014, 문제 8

순수수학 • 직선족의 포락선

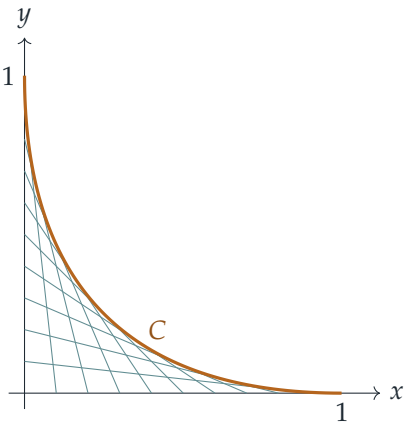
STEP I 2014, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s1-q8

핵심 아이디어

각 직선을 절편 형태(intercept form) $\frac{x}{a}+\frac{y}{1-a}=1$로 쓴다. 그러면 두 직선의 교점은 일차연립방정식에서 바로 얻어지고, a와 b에 대해 대칭인 형태로 나온다. $b\to a$로 보내면 한 직선이 "이웃" 직선과 만나는 점을 얻고, 이 점들은 모든 직선 L_a가 접하는 곡선을 그린다. 곡선 C는 이 직선족의 **포락선**(*envelope*)이며, 소문항 (iii)은 이 사실을 반대 방향에서 확인한다.



풀이

$(a,0)$과 $(0,1-a)$를 지나는 직선의 절편은 a와 $1-a$이므로

$$L_a:\ \frac{x}{a}+\frac{y}{1-a}=1, \qquad \text{즉} \qquad (1-a)x+ay=a(1-a).$$

소문항 (i)

다음 연립방정식을 푼다.

$$(1-a)x + ay = a(1-a),$$
$$(1-b)x + by = b(1-b).$$

y를 소거하기 위해 첫 번째 식에 b를, 두 번째 식에 a를 곱한 뒤 빼면

$$[b(1-a) - a(1-b)]x = ab(1-a) - ab(1-b), \qquad \text{즉} \qquad (b-a)x = ab(b-a).$$

$a \neq b$이므로 $b-a$로 나눌 수 있고, $x = ab$를 얻는다. 이를 첫 번째 식에 대입하면

$$ay = a(1-a) - (1-a)ab = a(1-a)(1-b),$$

이고, $a \neq 0$이므로 $y = (1-a)(1-b)$이다. 따라서 L_a와 L_b가 만나는 점은

$$(ab,\ (1-a)(1-b)).$$

(답이 a와 b에 대해 대칭인 것은 당연하다. 이 점이 L_b 위에도 있음을 확인할 수 있다: $(1-b)ab + b(1-a)(1-b) = b(1-b)(a+1-a) = b(1-b)$.)

소문항 (ii)

두 좌표 모두 b에 대한 다항식이므로 연속이고, 따라서 $b \to a$일 때의 극한은 단순히 $b = a$에서의 값이다:

$$(x, y) = (a^2,\ (1-a)^2).$$

$0 < a < 1$이므로 $0 < x = a^2 < 1$이고, $a > 0$이므로 양의 제곱근을 취하면 $\sqrt{x} = a$이다. 따라서

$$y = (1-a)^2 = (1-\sqrt{x})^2,$$

이므로 극한점은 요구한 대로 C 위에 있다.

소문항 (iii)

C 위의 임의의 점을 잡자. 그 점의 x좌표는 $(0,1)$에 속하므로 $t = \sqrt{x} \in (0,1)$로 두어 t^2으로 쓸 수 있고, 그 점은 $(t^2, (1-t)^2)$이다.

연쇄법칙(chain rule)으로 $y = (1-\sqrt{x})^2$을 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2(1-\sqrt{x}) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}},$$

이고, $x = t^2$에서 이 값은 $-\frac{1-t}{t}$이다. 그 점에서의 접선(tangent)은 다음과 같다.

$$y - (1-t)^2 = -\frac{1-t}{t}\,(x - t^2).$$

생각해 보기 이 직선이 L_a 가운데 하나임을 어떻게 알아볼 수 있을까?

직선 L_a는 두 절편으로 결정되며, 그 절편은 a와 $1-a$이어야 한다. 그러므로 접선의 절편을 구한다.

- $y=0$을 대입하면 $-(1-t)^2 = -\frac{1-t}{t}(x-t^2)$이다. $1-t \neq 0$이므로 약분하면 $x-t^2 = t(1-t)$, 즉 $x=t$이다.
- $x=0$을 대입하면 $y=(1-t)^2+\frac{1-t}{t}t^2=(1-t)^2+t(1-t)=1-t$이다.

따라서 접선은 $0<t<1$에 대해 $(t,0)$과 $(0,1-t)$를 지나므로 정확히 L_t이다. C의 모든 점은 어떤 $t\in(0,1)$로부터 나오므로, C의 모든 접선은 L_a 꼴이다(접점에서 $a=\sqrt{x}$). 이로써 증명이 끝난다.

$(a^2,(1-a)^2)$에서의 접선이 L_a이고, 이 점이 바로 소문항 (ii)에서 L_a로부터 얻은 점이라는 데 주목하자. 즉 각 직선은 자기 자신의 극한 교점에서 C에 접한다.

검산

- $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{3}$이면 소문항 (i)에서 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$을 얻는다. $L_{1/2}$ 위에서: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$; $L_{1/3}$ 위에서: $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$.
- $x=\frac{1}{4}$에서 곡선은 $y=\frac{1}{4}$이고 기울기는 -1이므로, 접선은 $x+y=\frac{1}{2}$이다. 이는 $(\frac{1}{2},0)$과 $(0,\frac{1}{2})$를 지나는 $L_{1/2}$이다.
- 곡선 자체는 x와 y에 대해 대칭인 포물선(parabola) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$의 일부이며, 이는 직선족의 대칭 $a\leftrightarrow 1-a$와 맞아떨어진다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $\sqrt{x}=a$의 근거를 밝히지 않는 것: 이를 위해서는 $a>0$이 필요하며, 이 조건은 주어져 있다.
- 소문항 (iii)에서 L_a가 C에 접한다는 것만 보이는 것. 문제가 묻는 것은 그 역이다: C의 임의의 접선에서 출발하여 그것이 어떤 L_a임을 보여야 한다.

STEP 너머

곡선 C는 직선족 L_a의 **포락선**, 즉 직선족의 모든 직선에 접하는 곡선이다. 일반적으로 곡선족 $F(x,y,a)=0$의 포락선은 $F=0$과 $\partial F/\partial a=0$에서 a를 소거하여 구하는데, 이는 소문항 (ii)의 "$b\to a$로 보내는" 극한을 미적분으로 표현한 것이다. 포락선은 광학에서 화

선(caustic)으로 나타나는데, 커피잔 속에 보이는 밝은 빛의 곡선이 그 예이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에 이런 성격의 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.