풀이

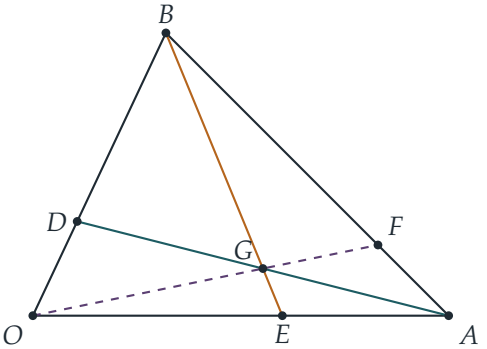
# STEP I 2014, 문제 7

순수수학 • 삼각형에서의 벡터

> **STEP I 2014, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q7

## 핵심 아이디어

모든 점을 **a**와 **b**의 결합으로 나타낸다. 이미 알고 있는 두 점을 지나는 직선 위의 점은 매개변수(parameter)가 하나인 벡터방정식(vector equation)으로 나타낼 수 있으므로, $G$는 두 직선 각각에서 하나씩, 두 가지 방법으로 쓸 수 있다. **a**와 **b**는 평행(parallel)하지 않으므로(삼각형이 퇴화(degenerate)하지 않으므로) 계수를 비교(comparing coefficients)할 수 있고, 그러면 두 매개변수에 대한 간단한 방정식 두 개를 얻는다.




## 풀이

먼저 $D$와 $E$의 위치를 구한다. $BD = r\,DO$이므로 점 $D$는 $O$에서 $B$까지 가는 길의 $\frac{1}{1+r}$만큼 간 지점에 있고, $OE = s\,EA$이므로 점 $E$는 $O$에서 $A$까지 가는 길의 $\frac{s}{1+s}$만큼 간 지점에 있다. 따라서

$$\mathbf{d} = \frac{1}{1+r}\,\mathbf{b}, \qquad \mathbf{e} = \frac{s}{1+s}\,\mathbf{a}.$$

**소문항 (i)**

직선 $AD$ 위의 일반적인 점은

$$\mathbf{a} + \lambda(\mathbf{d} - \mathbf{a}) = (1-\lambda)\,\mathbf{a} + \frac{\lambda}{1+r}\,\mathbf{b},$$

이고, 직선 $BE$ 위의 일반적인 점은

$$\mathbf{b} + \mu(\mathbf{e} - \mathbf{b}) = \frac{\mu s}{1+s}\,\mathbf{a} + (1-\mu)\,\mathbf{b}.$$

이다. $G$에서 이 두 식은 같다.

> **생각해 보기** $\mathbf{a}$의 계수와 $\mathbf{b}$의 계수를 각각 따로 같다고 놓아도 되는 이유는 무엇인가?

$O$, $A$, $B$가 진짜 삼각형을 이루므로 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 영벡터가 아니고 평행하지도 않다. 만약 $\alpha \neq \alpha'$인데 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \alpha'\mathbf{a} + \beta'\mathbf{b}$이면 $\mathbf{a}$가 $\mathbf{b}$의 실수배가 되는데, 이는 불가능하다. 따라서

$$1 - \lambda = \frac{\mu s}{1+s}, \qquad \frac{\lambda}{1+r} = 1 - \mu.$$

두 번째 식에서 $\lambda = (1+r)(1-\mu)$를 얻는다. 이를 첫 번째 식에 대입하면

$$\begin{aligned} 1 - (1+r)(1-\mu) &= \frac{\mu s}{1+s} \\ \mu\left[(1+r) - \frac{s}{1+s}\right] &= r \\ \mu\,\frac{(1+r)(1+s) - s}{1+s} &= r \\ \mu\,\frac{1+r+rs}{1+s} &= r, \end{aligned}$$

이므로

$$\mu = \frac{r(1+s)}{1+r+rs}.$$

이다. $r, s > 0$이므로 $1 + r + rs > 0$이어서 이렇게 나누어도 된다. 이 $\mu$의 값을 $BE$의 식에 대입하면 $\mathbf{a}$의 계수는

$$\frac{\mu s}{1+s} = \frac{rs}{1+r+rs},$$

이고, $\mathbf{b}$의 계수는

$$1 - \mu = \frac{1+r+rs-r-rs}{1+r+rs} = \frac{1}{1+r+rs}.$$

이다. 그러므로

$$\mathbf{g} = \frac{rs}{1+r+rs}\,\mathbf{a} + \frac{1}{1+r+rs}\,\mathbf{b},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

**소문항 (ii)**

직선 $OG$는 원점을 지나므로, 그 위의 모든 점은 $\mathbf{g}$의 스칼라배(scalar multiple) $k\mathbf{g}$이다.

$$k\mathbf{g} = \frac{k}{1+r+rs}\,(rs\,\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

$AB$는 점 $(1-\nu)\mathbf{a} + \nu\mathbf{b}$들로 이루어져 있으므로, 점 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$가 직선 $AB$ 위에 있을 필요충분조건은 $\alpha + \beta = 1$이다. 따라서 $F$에서는 $k(rs+1) = 1 + r + rs$이어야 하고,

$$\mathbf{f} = \frac{rs}{1+rs}\,\mathbf{a} + \frac{1}{1+rs}\,\mathbf{b}.$$

이다. 한편 $AF = t\,FB$는 $F$가 $A$에서 $B$까지 가는 길의 $\frac{t}{1+t}$만큼 간 지점에 있다는 뜻이므로

$$\mathbf{f} = \frac{1}{1+t}\,\mathbf{a} + \frac{t}{1+t}\,\mathbf{b}.$$

이다. (앞에서와 같은 이유로 허용되는) $\mathbf{a}$의 계수 비교로 $1 + t = \dfrac{1+rs}{rs}$를 얻으므로

$$t = \frac{1}{rs}.$$

이다. $\mathbf{b}$의 계수도 일치한다: $\dfrac{t}{1+t} = \dfrac{1/(rs)}{(1+rs)/(rs)} = \dfrac{1}{1+rs}$.

## 검산

- **중선(median).** $r = s = 1$이면 $D$와 $E$는 중점이므로 $G$는 무게중심(centroid)이어야 한다. 공식은 $\mathbf{g} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$를 주므로 옳고, $t = 1$이므로 $F$는 $AB$의 중점이다. 세 중선은 한 점에서 만나므로 당연히 그래야 한다.
- **체바의 정리(Ceva's theorem).** 답은 $r \cdot s \cdot t = 1$, 즉 $\dfrac{BD}{DO} \cdot \dfrac{OE}{EA} \cdot \dfrac{AF}{FB} = 1$임을 말해 주는데, 이는 한 점에서 만나는 직선 $AD$, $BE$, $OF$에 대한 체바의 정리 바로 그것이다.
- **수치 예.** $\mathbf{a} = (5,0)$, $\mathbf{b} = (0,5)$, $r = 2$, $s = 3$으로 놓자. 그러면 $D = (0, \frac{5}{3})$, $E = (\frac{15}{4}, 0)$이고, 공식은 $G = (\frac{30}{9}, \frac{5}{9}) = (\frac{10}{3}, \frac{5}{9})$를 준다. 이 점은 방정식이 $x + 3y = 5$인 $AD$ 위에 있고, 방정식이 $4x + 3y = 15$인 $BE$ 위에도 있다. 직선 $OG$는 $x + y = 5$와 $F = (\frac{30}{7}, \frac{5}{7})$에서 만나고, $\overrightarrow{AF} = (-\frac{5}{7}, \frac{5}{7})$, $\overrightarrow{FB} = (-\frac{30}{7}, \frac{30}{7})$이므로 $AF : FB = 1 : 6$이며, 따라서 $t = \frac{1}{6} = \frac{1}{rs}$이다. 또한 무작위로 고른 삼각형과 비 2000가지에 대해 컴퓨터로 정확한 산술을 써서 이 공식들을 확인하였다.

## 흔한 실수

- 비를 거꾸로 잡는 실수: $BD = r\,DO$이면 $D$는 $O$에서 $B$까지 가는 길의 $\frac{r}{1+r}$이 아니라 $\frac{1}{1+r}$만큼 간 지점에 있다.

- 계수 비교가 왜 타당한지 말하지 않고 계수를 비교하는 실수: 이를 위해서는 **a**와 **b**가 평행하지 않아야 한다.
- 소문항 (ii)에서 **g**의 크기를 다시 조정하는 것을 잊는 실수: $G$ 자체는 계수의 합이 1보다 작으므로 $AB$ 위에 있지 않다.

## STEP 너머

**f**의 계수처럼 합이 1인 계수를 **무게중심 좌표**(*barycentric coordinates*)라고 한다. 이 좌표는 꼭짓점에 놓인 가중치로 점을 나타내며, 체바의 정리나 메넬라우스(Menelaus)의 정리 같은 결과를 거의 저절로 얻게 해 준다. 선형대수학(linear algebra)의 언어로 말하면, 계수 비교가 가능한 것은 **a**와 **b**가 일차독립(linearly independent)이어서 평면의 기저(basis)를 이루기 때문이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 기저와 좌표를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.