풀이

STEP I 2014, 문제 6

순수수학 • 로지스틱 사상의 점화식

> **STEP I 2014, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q6

이 문제는 *Beyond STEP*의 8.7 절 **풀 수 있는 혼돈**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch08/solvable-chaos.html

핵심 아이디어

식 $4x(1-x)$는 다루기 어색해 보이지만 $x = \sin^2\theta$로 놓으면 사정이 달라진다. 이때 $1-x = \cos^2\theta$이고 $4\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\sin\theta\cos\theta)^2$는 배각 공식(double-angle formula)이 모습을 바꾼 것이다. 점화식(recurrence)의 각 단계는 단지 각을 두 배로 만들 뿐이다. 그러면 소문항 (ii)는 계수에 관한 조건 하나만 성립하면 **어떤** 이차 점화식이든 일차 변수 변환(change of variable)으로 이 점화식으로 바꿀 수 있다는 것을 알아차리는 문제이다.

풀이

소문항 (i)

$u_0 = \sin^2\theta$이면 $1-u_0 = \cos^2\theta$이므로

$$u_1 = 4\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\sin\theta\cos\theta)^2 = \sin^2 2\theta.$$

이는 u_0에서 θ를 2θ로 바꾼 것과 정확히 같은 꼴이므로, 같은 계산을 하면

$$u_2 = 4\sin^2 2\theta\ \cos^2 2\theta = \sin^2 4\theta.$$

각이 단계마다 두 배가 되므로 다음과 같이 추측한다(conjecture).

$$u_n = \sin^2(2^n\theta) \qquad (n \geq 0).$$

수학적 귀납법(*induction*)에 의한 증명. $n = 0$일 때 이 식은 $u_0 = \sin^2\theta$이므로 참이다. 어떤 $k \geq 0$에 대하여 $u_k = \sin^2(2^k\theta)$라고 가정하자. 그러면 $1 - u_k = \cos^2(2^k\theta)$이고,

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 4\sin^2(2^k\theta)\cos^2(2^k\theta) \\ &= \big(2\sin(2^k\theta)\cos(2^k\theta)\big)^2 \\ &= \sin^2(2^{k+1}\theta), \end{aligned}$$

이다. 여기서 $A = 2^k\theta$로 놓고 $\sin 2A = 2\sin A\cos A$를 이용하였다. 따라서 k에 대한 결과가 $k+1$에 대한 결과를 함의하므로, 수학적 귀납법에 의해 모든 $n \geq 0$에 대하여 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$이다.

소문항 (ii)

$\alpha \neq 0$인 $v_n = \alpha u_n + \beta$로 놓는다(v_n으로부터 u_n을 다시 구할 수 있으려면 $\alpha \neq 0$이어야 한다). v_n에 대한 점화식에 대입하면

$$\alpha u_{n+1} + \beta = -p(\alpha u_n + \beta)^2 + q(\alpha u_n + \beta) + r.$$

전개한 뒤 α로 나누면

$$u_{n+1} = -p\alpha\, u_n^2 + (q - 2p\beta)\, u_n + \frac{-p\beta^2 + (q-1)\beta + r}{\alpha}.$$

이것이 $u_{n+1} = 4u_n - 4u_n^2$이 되기를 원하므로 계수를 비교한다.

- u_n^2: $p\alpha = 4$이므로 $\alpha = \dfrac{4}{p}$이다($p \neq 0$이므로 문제없고, 이때 $\alpha \neq 0$도 성립한다).
- u_n: $q - 2p\beta = 4$이므로 $\beta = \dfrac{q-4}{2p}$이다.
- 상수항: $-p\beta^2 + (q-1)\beta + r = 0$.

처음 두 식이 α와 β를 정하고, 세 번째 식은 p, q, r에 대한 조건이 된다. $\beta = (q-4)/(2p)$를 대입하고 양변에 $4p$를 곱하면

$$\begin{aligned} & 0 = -p\cdot\frac{(q-4)^2}{4p^2} + (q-1)\frac{q-4}{2p} + r \\ \iff\quad & 0 = -(q-4)^2 + 2(q-1)(q-4) + 4pr \\ & \quad = (q-4)\big(-(q-4) + 2(q-1)\big) + 4pr \\ & \quad = (q-4)(q+2) + 4pr \\ & \quad = q^2 - 2q - 8 + 4pr. \end{aligned}$$

따라서 $4pr = 8 + 2q - q^2$이면 $\alpha = 4/p$, $\beta = (q-4)/(2p)$로 놓을 때 세 계수가 모두 일치하고, 수열 $u_n = (v_n - \beta)/\alpha$는 요구한 대로 $(*)$를 만족한다.

주어진 특정 수열. 여기서는 $p = 1, q = 2, r = 2$이다. $4pr = 8$이고 $8 + 2q - q^2 = 8 + 4 - 4 = 8$이므로 조건이 성립한다. 따라서

$$\alpha = 4, \qquad \beta = \frac{2-4}{2} = -1, \qquad \text{따라서} \qquad v_n = 4u_n - 1.$$

생각해 보기 소문항 (i)을 쓰려면 $u_0 = \sin^2\theta$이어야 한다. 여기서 알맞은 θ를 찾을 수 있을까?

$v_0 = 1$이므로 $u_0 = (1+1)/4 = \frac{1}{2}$이어야 하고, $\frac{1}{2} = \sin^2\frac{\pi}{4}$이다. 따라서 $\theta = \pi/4$로 놓으면 되고, 소문항 (i)에 의해 $u_n = \sin^2(2^n\pi/4) = \sin^2(2^{n-2}\pi)$이다. 그러므로 $2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$를 이용하면

$$v_n = 4\sin^2\left(2^{n-2}\pi\right) - 1 = 1 - 2\cos\left(2^{n-1}\pi\right),$$

이다. 값을 계산하면 다음과 같다.

- $n = 0$: $v_0 = 4\sin^2\frac{\pi}{4} - 1 = 1$;
- $n = 1$: $v_1 = 4\sin^2\frac{\pi}{2} - 1 = 3$;
- $n \geq 2$: 2^{n-2}이 정수이므로 $\sin(2^{n-2}\pi) = 0$이고 $v_n = -1$이다.

따라서 수열은

$$1,\ 3,\ -1,\ -1,\ -1,\ \ldots$$

이다. 즉 $v_0 = 1, v_1 = 3$이고 모든 $n \geq 2$에 대하여 $v_n = -1$이다.

검산

점화식을 직접 반복해 보면 $v_1 = -1 + 2 + 2 = 3$, $v_2 = -9 + 6 + 2 = -1$, $v_3 = -1 - 2 + 2 = -1$이다. -1은 자기 자신으로 옮겨지므로, 공식이 말하는 대로 수열은 계속 -1에 머문다. 소문항 (i)에 대해서는 $\theta = \pi/6$을 넣어 보자. $u_0 = \frac{1}{4}$, $u_1 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \sin^2\frac{\pi}{3}$, $u_2 = 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \sin^2\frac{2\pi}{3}$이므로 예측과 같다. 공식 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$는 여러 임의의 각과 처음 몇 개의 항에 대하여 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- $u_n = \sin^2(2n\theta)$라고 쓰는 것: 각은 매번 두 배가 되므로 $2n$이 아니라 2^n처럼 커진다.
- 시작값 $u_0 = (v_0 - \beta)/\alpha$가 $[0,1]$에 속하는지, 그래서 정말 $\sin^2\theta$로 쓸 수 있는지 확인하는 것을 잊는 것.
- 상수항에 관한 식을 문제가 도달하라고 요구하는 조건으로 보지 않고, 풀어야 할 세 번째 미지수에 대한 식으로 다루는 것.

STEP 너머

점화식 $u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n)$은 매개변수가 가장 극단적인 값일 때의 로지스틱 사상(logistic map)으로, 카오스(chaos)의 대표적인 예이다. $u_n = \sin^2(2^n\theta)$이므로 θ/π를 이진법으로 써 보면 각 단계가 이진 자릿수를 한 자리씩 옮기는 것에 불과함을 알 수 있고, 따라서 가까운 두 시작값은 지수적으로 빠르게 멀어진다. 소문항 (ii)의 치환은 **켤레**(*conjugacy*)로, 두 동역학계(dynamical system)가 좌표를 바꾸고 나면 실제로는 같다는 생각이다. Strogatz의 *Nonlinear Dynamics and Chaos*(비선형 동역학과 카오스)는 이러한 개념을 매우 읽기 쉽게 소개하는 입문서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.