풀이

STEP I 2014, 문제 5

순수수학 • 삼차부등식

> **STEP I 2014, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q5

핵심 아이디어

소문항 (i)은 한 변수의 삼차함수(cubic)로, $x \geq 0$에서의 최솟값이 정확히 0이 되어 $x = a$에서 축에 접한다. 이 하나의 부등식 $(x+2a)^3 \geq 27a^2x$는 사실 모습을 바꾼 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)이다. 좌변에는 합 $x + a + a$가, 우변에는 곱 $x \cdot a \cdot a$가 들어 있다. 소문항 (ii)와 (iii)의 핵심은 무엇을 x와 a로 둘지 정하고, 등호가 정확히 언제 성립하는지 추적하는 것이다.

풀이

소문항 (i)

미분하면

$$f'(x) = 3(x+2a)^2 - 27a^2 = 3((x+2a)^2 - 9a^2) = 3(x-a)(x+5a),$$

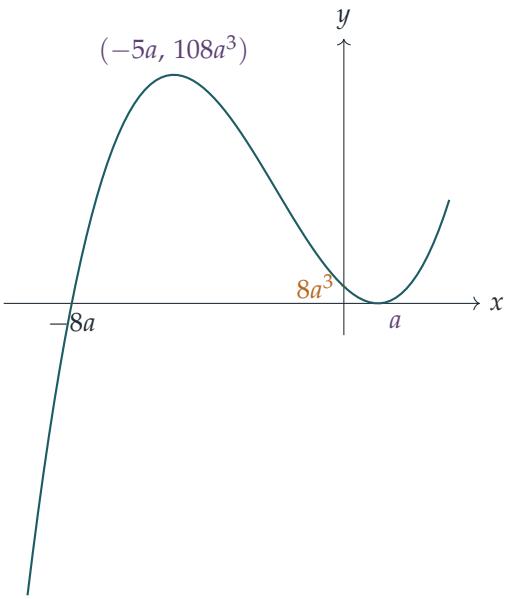
이므로 정류점(stationary point)은 $x = a$와 $x = -5a$이다. 이 점들에서

$$f(a) = (3a)^3 - 27a^3 = 0, \qquad f(-5a) = (-3a)^3 + 135a^3 = 108a^3,$$

이고, $f(0) = 8a^3$이다. f는 최고차항의 계수(leading coefficient)가 양수인 삼차함수이므로 $x = -5a$에서 극대(local maximum)이고 $x = a$에서 극소(local minimum)이다. 극솟값이 0이므로 그래프는 $x = a$에서 x축에 접하고, 따라서 $(x-a)^2$은 인수(factor)이다. 이제 상수항을 비교하면

$$f(x) = (x-a)^2(x+8a),$$

를 얻는데, 양변을 전개하여 모두 $x^3 + 6ax^2 - 15a^2x + 8a^3$이 됨을 확인할 수 있다.



$x \geq 0$에서 그래프는 높이 $8a^3 \geq 0$에서 출발하여 $x = a$에서 0까지 감소한 뒤, 그 후로는 계속 증가한다. 따라서 $x \geq 0$에서 f의 최솟값은 0이고,

$$f(x) \geq 0 \quad \text{여기서} x \geq 0,$$

이며, 등호는 $x = a$일 때만 성립한다. (인수분해된 꼴도 같은 사실을 바로 말해 준다. $x \geq 0$이면 $(x-a)^2 \geq 0$이고, $x = a = 0$인 경우를 제외하면 $x + 8a > 0$이다.) $a = 0$이면 그림은 $f(x) = x^3$으로 퇴화하는데, 이 역시 $x \geq 0$에서 음이 아니며 등호는 $x = 0 = a$일 때만 성립한다. 어느 경우든

$$(x+2a)^3 \geq 27a^2x \quad (x, a \geq 0), \qquad \text{등호 성립의 필요충분조건: } x = a.$$

소문항 (ii)

xy^2을 다루어야 하므로 소문항 (i)에서 $a = y \geq 0$으로 둔다. $x \geq 0, y \geq 0$일 때

$$27xy^2 \leq (x+2y)^3 \leq 3^3 = 27,$$

이다. 두 번째 부등식은 $0 \leq x + 2y \leq 3$이고 세제곱이 증가함수이기 때문이다. 따라서 영역 전체에서 $xy^2 \leq 1$이다.

이 상한(upper bound)은 실제로 도달된다. 등호가 성립하려면 (소문항 (i)에 의해) $x = y$이고 $x + 2y = 3$이어야 하므로 $x = y = 1$이며, 실제로 $1 \cdot 1^2 = 1$이다. 따라서 xy^2의 최댓값(greatest value)은 1이고, 이는 $x = 1, y = 1$에서만 얻어진다.

소문항 (iii)

> **생각해 보기** 소문항 (i)에는 x와 a라는 두 수만 등장한다. 이것이 어떻게 세 수에 대해 무언가를 말해 줄 수 있을까?

q와 r을 하나로 묶는다. $x = p, 2a = q + r$로 두면 $a = \frac{1}{2}(q + r) \geq 0$이다. 소문항 (i)에 의해

$$(p + q + r)^3 \geq 27p\left(\frac{q + r}{2}\right)^2.$$

이제 $\left(\frac{q+r}{2}\right)^2 - qr = \frac{(q-r)^2}{4} \geq 0$이고 $p \geq 0$이므로

$$(p + q + r)^3 \geq 27p\left(\frac{q + r}{2}\right)^2 \geq 27pqr,$$

이며, 이것이 구하는 부등식이다.

등호 조건. $(p + q + r)^3 = 27pqr$이면 이 부등식 연쇄의 두 부등식이 모두 등식이어야 한다.

- 첫 번째 부등식은 정확히 $x = a$일 때, 즉 $p = \frac{1}{2}(q + r)$일 때 등식이 된다.
- 두 번째 부등식은 정확히 $\frac{27}{4}p(q - r)^2 = 0$일 때, 즉 $p = 0$ 또는 $q = r$일 때 등식이 된다.

$p = 0$이면 첫 번째 조건에서 $q + r = 0$이므로 $q = r = 0$이기도 하다. $q = r$이면 첫 번째 조건에서 $p = q$이다. 어느 쪽이든 $p = q = r$이다. 역으로 $p = q = r$이면 양변은 모두 $27p^3$이다. 따라서 등호가 성립하는 것은 다음 경우이고, 그 경우뿐이다.

$$p = q = r.$$

검산

- $(x - a)^2(x + 8a)$를 전개하면 $(x + 2a)^3 - 27a^2x$가 다시 나온다. $a = 1$이면 $f(0) = 8$, $f(1) = 0, f(3) = 4 \cdot 11 = 44$로 모두 음이 아니다.
- 소문항 (ii)에서 직선 $x + 2y = 3$ 위의 다른 점들을 시험해 보자. $(x, y) = (2, \frac{1}{2})$이면 $\frac{1}{2}$, $(0.5, 1.25)$이면 약 0.78로, 둘 다 1보다 작다. 삼각형 영역을 촘촘한 격자로 나누어 컴퓨터로 탐색해도 $(1, 1)$에서 최댓값 1이 나온다.
- 소문항 (iii)에서 $p = 1, q = 2, r = 3$이면 $216 \geq 162$이다. 작은 자연수들에 대해 컴퓨터로 탐색해 보면 등호는 $p = q = r$일 때만 성립했다.

흔한 실수

- $f(a) = 0$임을 보이고서 이것이 왜 $x \geq 0$에서의 **최솟값**인지 설명하지 않는 것. 끝점에서의 값 $f(0) = 8a^3 \geq 0$을 포함하여 그래프의 모양(또는 인수분해)을 근거로 들어야 한다.
- 소문항 (ii)에서 상한 1이 실제로 도달되는지 확인하지 않는 것. 상한만으로는 최댓값이 되지 않는다.
- 소문항 (iii)의 등호 조건에서 $q = r$만 결론짓고 다른 경우인 $p = 0$을 빠뜨리는 것. 이 경우는 배제하거나, $p = q = r = 0$이 될 수밖에 없음을 보여야 한다.

STEP 너머

소문항 (iii)은 세 항의 산술-기하 평균 부등식 $\frac{1}{3}(p+q+r) \geq \sqrt[3]{pqr}$이며, 여기서 쓴 방법, 즉 두 변수를 그 평균으로 합치고 두 변수 부등식을 이용하는 방법은 n개 항에 대한 산술-기하 평균 부등식의 고전적인 증명들의 씨앗이다. 소문항 (ii)는 작은 제약 최적화(constrained optimisation) 문제로, 대학 과정에서는 라그랑주(Lagrange) 승수법(Lagrange multipliers)으로 공략하는 종류의 문제이다. 하지만 산술-기하 평균 부등식 같은 부등식이 훨씬 깔끔하게 답을 주는 경우가 많다. 이런 정신의 문제를 더 많이 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.