풀이

STEP I 2014, 문제 4

순수수학 • 관련 변화율

> **STEP I 2014, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q4

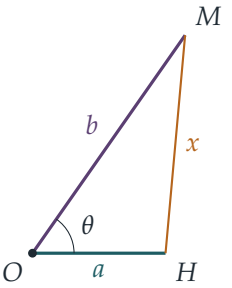
핵심 아이디어

두 바늘과 두 바늘 끝을 잇는 선분은 삼각형을 이루므로, 코사인 법칙(cosine rule)으로 x를 θ에 대한 식으로 나타낼 수 있다. 시계가 정확하므로 θ는 일정한 비율로 증가하고, 따라서 x의 증가율은 그 상수에 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$를 곱한 것이다. 이제 이것을 최대화하는 일은 평범한 일변수 미적분 문제가 되며, 정류점(stationary point)을 구하는 방정식은 $\cos\theta$에 대한 이차식으로 깔끔하게 인수분해된다.

풀이

x의 증가율

O를 회전축, H를 시침의 끝, M을 분침의 끝이라 하자. 그러면 $OH = a$, $OM = b$, $\angle HOM = \theta$, $HM = x$이다.



코사인 법칙에 의하여

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

$x \geq b - a > 0$이므로 x로 마음껏 나눌 수 있다. 양변을 시간 t에 대하여 미분하면

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2ab\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.$$

시계가 정확하므로 각 바늘은 일정한 각속도(angular speed)로 돌고, 두 바늘 사이의 각은 일정한 비율 $\omega > 0$로 변한다(이는 두 각속도의 차이다. $0 \leq \theta < \pi$인 동안에는 분침이 앞서 나가므로 θ는 증가한다). 따라서

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega\, ab\,\frac{\sin\theta}{x}.$$

그러므로 $0 \leq \theta < \pi$에서 $f(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{x}$가 최대가 되는 곳을 찾아야 한다. 이때 x는 θ에 의존하며 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{ab\sin\theta}{x}$임을 기억하자.

최대화하기

몫의 미분법(quotient rule)에 의하여

$$f'(\theta) = \frac{x\cos\theta - \sin\theta\cdot\dfrac{ab\sin\theta}{x}}{x^2} = \frac{x^2\cos\theta - ab\sin^2\theta}{x^3}.$$

$c = \cos\theta$라 하자. $x^2 = a^2 + b^2 - 2abc$와 $\sin^2\theta = 1 - c^2$을 이용하면 분자는

$$\begin{aligned} x^2\cos\theta - ab\sin^2\theta &= (a^2+b^2)c - 2abc^2 - ab + abc^2 \\ &= -(abc^2 - (a^2+b^2)c + ab) \\ &= -(ac-b)(bc-a) \\ &= (b-ac)(bc-a). \end{aligned}$$

생각해 보기 이 정류점이 최댓값이고, 또 유일한 정류점이라는 것을 어떻게 알 수 있는가?

$c \leq 1 < b/a$이므로 $ac < b$이고, 따라서 인수 $b - ac$는 항상 양수이다. 또 $x^3 > 0$이다. 그러므로 $f'(\theta)$의 부호는 $bc - a$의 부호, 즉 $\cos\theta - \dfrac{a}{b}$의 부호와 같다.

- $\cos\theta > a/b$일 때(θ가 작을 때) $f'(\theta) > 0$이고 f는 증가한다.
- $\cos\theta < a/b$일 때(θ가 클 때) $f'(\theta) < 0$이고 f는 감소한다.

$\cos\theta$는 $[0, \pi)$에서 감소하고 $0 < a/b < 1$이므로, 이 범위에서 $\cos\theta = a/b$를 만족하는 θ는 정확히 하나 존재하며, f는 그 점까지 증가하다가 그 뒤로 감소한다. 따라서 이 점에서 x의 증가율은 전역 최댓값(global maximum)을 가진다. 이 점에서

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\frac{a}{b} = b^2 - a^2,$$

이므로 x의 증가율은 $x = (b^2 - a^2)^{1/2}$일 때 최대가 되어, 요구된 결과를 얻는다.

기하학적으로 보면 $x^2 + a^2 = b^2$은 삼각형이 H에서 직각을 가진다는 뜻이다. 즉 두 바늘 끝을 잇는 선분이 시침과 수직일 때 증가율이 최대가 된다.

$b = 2a$인 경우

이제 $\cos\theta = a/b = \frac{1}{2}$이므로 최대 증가율은 $\theta = \pi/3$일 때 나타난다.

t를 정오 이후 흐른 시간(분 단위)이라 하자. 분침은 60분에 2π만큼, 시침은 720분에 2π만큼 돌며, 둘 다 수직 방향에서 시계 방향으로 돈다. 따라서 두 바늘 사이의 각은

$$\theta = 2\pi\left(\frac{1}{60} - \frac{1}{720}\right)t = 2\pi \cdot \frac{11}{720}\,t = \frac{11\pi}{360}\,t,$$

이며, 이 값이 π보다 작은 동안 이 식이 성립한다. 정오에 $\theta = 0$에서 출발하여 θ가 처음으로 $\pi/3$에 도달하는 것은

$$\frac{11\pi}{360}\,t = \frac{\pi}{3} \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{120}{11} = 10\tfrac{10}{11}\text{ 분.}$$

일 때이다. 이는 약 10.91분(10분 약 55초)으로, 요구된 대로 11분보다 조금 짧다.

검산

- $\theta = 0$일 때 증가율은 0이고(두 바늘이 겹쳐 있으며 $x = b - a$가 최솟값이다), $\theta \to \pi$일 때 증가율은 다시 0으로 수렴한다(이때 $x \to a + b$로 최댓값이다). 따라서 그 사이 어딘가에서 최댓값이 나타나는 것은 정확히 예상한 대로이다.
- $a = 1, b = 2$로 놓고 바늘 끝의 위치를 1분마다 추적하여 두 끝 사이 거리의 변화율을 어림하면, 최대 변화율은 $t \approx 10.909$분에서 나타나며, 이때 $x \approx 1.732 = \sqrt{3} = \sqrt{b^2 - a^2}$이다.
- 답이 11보다 조금 작은 이유는 다음과 같다. 시침이 멈춰 있다면 분침이 60°에 도달하는 데 정확히 10분이 걸린다. 그런데 시침이 조금씩 앞으로 움직이므로 시간이 약간 더 필요하다. 또 120/11은 잘 알려진 "두 바늘은 720/11분 뒤에 다시 겹친다"에 나오는 수와 같은 종류의 수이다.

흔한 실수

- x 자체를 최대화하거나, 몫의 미분법 단계에서 x도 θ에 의존한다는 것을 놓친 채 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$를 최대화하는 것.
- $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$로 분침의 속력($2\pi/60$ per minute)만 사용하여 정확히 10분이라는 답을 얻는 것. 두 바늘 사이의 각은 두 속력의 **차이**로 증가한다.

► $b > a$이므로 불가능한 근 $\cos\theta = b/a$를 버리는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이것은 관련 변화율(related rates) 문제이다. 한 양이 알려진 비율로 변할 때, 그 양과 기하학적으로 연결된 다른 양이 어떻게 반응하는지를 추적한다. 시간에 따라 균일하게 변하는 각으로 위치를 나타낸다는 같은 아이디어는 행성 운동을 다루는 출발점이기도 하다. 원 궤도를 도는 두 행성 사이의 거리는 여기서의 x와 똑같이 움직이며, 가장 빠르게 멀어지는 순간도 같은 방법으로 구할 수 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이런 종류의 운동학을 벡터를 사용하여 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.