풀이

STEP I 2014, 문제 3

순수수학 • 다항방정식과 부등식

> **STEP I 2014, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q3

핵심 아이디어

두 적분(integral) 모두 기본적인 적분이므로, 주어진 조건은 a와 b에 대한 다항식 방정식(polynomial equation)일 뿐이다. 핵심은 공통인수(common factor) $b-a$를 찾아내는 것(이 값은 0이 아니므로 약분할 수 있다)과, 소문항 (iii)에서 남은 식이 충분히 대칭적(symmetric)이어서 합 $b+a$와 차 $b-a$로 깔끔하게 나타낼 수 있음을 알아차리는 것이다.

풀이

적분을 계산하면 조건은 다음과 같다.

$$\frac{b^3-a^3}{3} = \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2(b+a)^2}{4}. \qquad (*)$$

$b^3-a^3 = (b-a)(b^2+ab+a^2)$이고 $b-a>0$이므로, $(*)$를 $b-a$로 나누면 다음을 얻는다.

$$4(b^2+ab+a^2) = 3(b-a)(b+a)^2. \qquad (**)$$

소문항 (i)

$a=0$이면 $(**)$는 $4b^2=3b^3$이 된다. $b>0$이므로 b^2으로 나눌 수 있고, 따라서

$$b = \tfrac{4}{3}.$$

소문항 (ii)

$a = 1$이면 $(**)$는 다음이 된다.

$$4(b^2 + b + 1) = 3(b-1)(b+1)^2 = 3(b^3 + b^2 - b - 1),$$

즉 $3b^3 + 3b^2 - 3b - 3 - 4b^2 - 4b - 4 = 0$이고, 정리하면

$$3b^3 - b^2 - 7b - 7 = 0,$$

이므로 원하는 식이 성립한다.

이제 $f(x) = 3x^3 - x^2 - 7x - 7$이라 하면

$$f'(x) = 9x^2 - 2x - 7 = (9x + 7)(x - 1).$$

정류점(stationary point)은 $x = -\frac{7}{9}$(삼차식(cubic)의 최고차항 계수(leading coefficient)가 양수이므로 극댓값(local maximum))과 $x = 1$(극솟값(local minimum))에 있고,

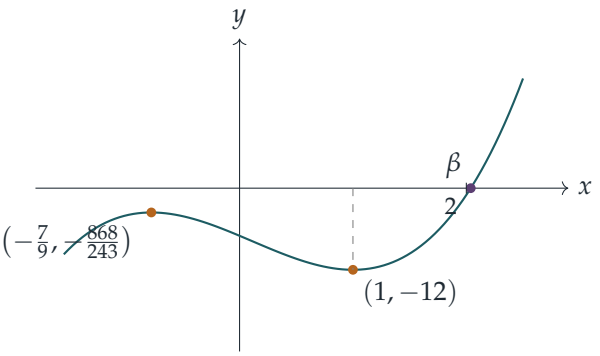
$$f(1) = 3 - 1 - 7 - 7 = -12, \qquad f\left(-\tfrac{7}{9}\right) = \frac{-343 - 147 + 1323 - 1701}{243} = -\frac{868}{243}.$$

생각해 보기 극댓값을 알면 근의 개수를 어떻게 알 수 있을까?

극댓값은 음수이다. $x \le 1$에서 f는 $x = -\frac{7}{9}$까지 증가한 뒤 감소하므로, 그 범위에서 $f(x) \le f(-\frac{7}{9}) < 0$이다. 따라서 $x \le 1$인 근은 없다. $x > 1$에서 f는 순증가하고(f'의 두 인수가 모두 양수이다) $f(x) \to \infty$이므로, 0을 정확히 한 번 지난다. 그러므로 실근은 정확히 하나이고,

$$f(2) = 24 - 4 - 14 - 7 = -1 < 0, \qquad f(3) = 81 - 9 - 21 - 7 = 44 > 0,$$

이므로 연속성(continuity)에 의해 이 근은 2와 3 사이에 있다.



그림은 곡선 $y = 3x^3 - x^2 - 7x - 7$을 나타낸다. 두 극점(turning point)이 모두 x축 아래에 있으므로, 곡선은 $\beta \approx 2.04$에서 단 한 번만 x축과 만난다.

소문항 (iii)

$p = b + a$, $q = b - a$라 하면 $p^2 = b^2 + 2ab + a^2$, $q^2 = b^2 - 2ab + a^2$이므로

$$3p^2 + q^2 = 4b^2 + 4ab + 4a^2 = 4(b^2 + ab + a^2).$$

따라서 $(**)$의 좌변은 $3p^2 + q^2$이고, 우변은 $3qp^2$이다. 그러므로

$$3p^2 + q^2 = 3p^2 q,$$

이므로 원하는 식이 성립한다. 정리하면 $q^2 = 3p^2(q-1)$이다. $q > 0$이므로 좌변은 양수이고, 따라서 $q \neq 1$이며

$$p^2 = \frac{q^2}{3(q-1)}.$$

이제 결론을 이끌어 내자.

- **하계.** $q^2 > 0$이고 ($p = b + a > 0$이므로) $p^2 > 0$이다. 따라서 $3(q-1) = q^2/p^2 > 0$, 즉 $q > 1$이다.
- **상계.** $a \geq 0$이므로 $p = q + 2a \geq q > 0$이고, 따라서 $p^2 \geq q^2$이다. 그러므로

  $$\frac{q^2}{3(q-1)} \geq q^2 \iff 1 \geq 3(q-1) \iff q \leq \tfrac{4}{3},$$

  여기서 $q^2 > 0$으로 나누고 $3(q-1) > 0$을 곱했는데, 둘 다 부등호의 방향을 바꾸지 않는다.

따라서 $1 < b - a \leq \frac{4}{3}$이고, 등호는 정확히 $a = 0$일 때 성립하며 이것이 소문항 (i)의 경우이다.

검산

- 소문항 (i)은 소문항 (iii)과 들어맞는다. $a = 0$이면 $q = b = \frac{4}{3}$으로, 범위의 최댓값이다.
- 소문항 (ii)도 들어맞는다. 근은 $b \approx 2.0390$이므로 $q = b - 1 \approx 1.039$이고, 이는 $(1, \frac{4}{3}]$ 안에 있다. $[1, 2.0390]$에서 두 적분을 계산하면 소수점 아래 여러 자리까지 같은 값(약 2.4924)이 나온다.
- 역으로, $(1, \frac{4}{3}]$ 안의 임의의 q에 대해 $p = q/\sqrt{3(q-1)} \geq q$이므로 유효한 $a = \frac{1}{2}(p - q) \geq 0$을 얻는다. 즉 이 범위는 정확하다(sharp).

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $b - a$를 약분하지 않아, 불필요한 근(spurious root) $b = 1$을 가진 사차식(quartic)이 남는 경우.

- $f(2) < 0 < f(3)$만 보이는 경우. 이것은 $(2,3)$에 근이 **하나 존재함**은 증명하지만, 그것이 유일한 실근임은 증명하지 못한다. 극점도 함께 살펴야 한다.
- 소문항 (iii)에서 $q-1>0$임을 확인하기 전에 부등식을 $q-1$로 나누는 경우.

STEP 너머

적분에 대한 코시–슈바르츠 부등식(Cauchy–Schwarz inequality)에 의하면 $\left(\int_a^b x\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x$이고, 등호는 피적분함수(integrand) x가 상수일 때만 성립하는데 여기서는 그렇지 않다. 이를 주어진 조건과 결합하면 $\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x < (b-a)\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x$가 되므로 $b-a>1$이다. 소문항 (iii)의 하계를 한 줄로 얻는 것이다. 다양한 형태의 코시–슈바르츠 부등식은 대학 1학년 해석학(analysis)에서 가장 많이 쓰이는 도구 중 하나이다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 리만(Riemann) 적분과 이와 같은 부등식들을 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.