풀이

STEP I 2014, 문제 2

순수수학 • 로그함수의 적분

> **STEP I 2014, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q2

핵심 아이디어

모든 것은 $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$로 인수분해(factorising)하는 데서 출발한다. 그러면 이 차식의 로그(logarithm)가 $\ln(2-x) + \ln(2+x)$로 나뉘고, 이 두 조각은 소문항 (i)과 그 거울상을 이용하여 곧바로 적분할 수 있다. 그다음 절댓값(modulus) 기호는 $\ln|x^2-4|$가 어디에서 양수이고 어디에서 음수인지만 따져 보라고 요구할 뿐이며, (ii)의 그래프 개형이 바로 그것을 보여 준다.

풀이

소문항 (i)

$x < 2$이면 $2 - x > 0$이므로 모든 식이 정의된다. 우변을 미분하되, $-(2-x)\ln(2-x)$에는 곱의 미분법(product rule)을 쓴다. $-(2-x)$의 도함수는 1이고, 연쇄 법칙(chain rule)에 의해 $\ln(2-x)$의 도함수는 $-\frac{1}{2-x}$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[-(2-x)\ln(2-x) + (2-x)\Big] &= 1\cdot\ln(2-x) - (2-x)\cdot\left(-\frac{1}{2-x}\right) - 1 \\ &= \ln(2-x) + 1 - 1 = \ln(2-x),\end{aligned}$$

이므로 주어진 부정적분(antiderivative)은 옳다.

(다른 방법으로, $u = 2-x$로 치환(substitute)하고 $\int \ln u \,\mathrm{d}u = u\ln u - u$를 이용해도 된다.)

같은 방법으로 $x > -2$일 때

$$\int \ln(2+x)\,\mathrm{d}x = (2+x)\ln(2+x) - (2+x) + c,$$

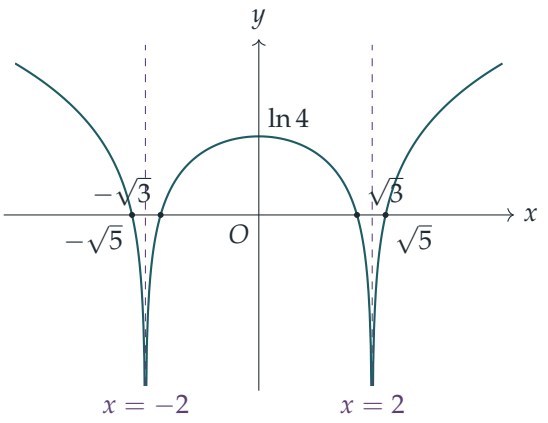
이며, 이 식도 나중에 필요하다.

소문항 (ii)

$f(x) = \ln|x^2 - 4|$라 하자. 이 함수는 $x \neq \pm 2$에서 정의된다. $f(-x) = f(x)$이므로 곡선은 y축에 대하여 대칭(symmetric)이다.

- $|x| < 2$일 때: $f(x) = \ln(4 - x^2)$이고, 이는 $x = 0$에서 최대이며 그때 $y = \ln 4$이다. $4 - x^2 = 1$, 즉 $x = \pm\sqrt{3}$에서 0이 되고, $x \to \pm 2$일 때 $-\infty$로 발산한다.
- $|x| > 2$일 때: $f(x) = \ln(x^2 - 4)$이고, 이는 $x = \pm 2$ 근처의 $-\infty$에서 출발하여 증가하다가 $x^2 - 4 = 1$, 즉 $x = \pm\sqrt{5}$에서 x축과 만나고, 그 뒤로는 $2\ln|x|$처럼 천천히 증가한다.

직선 $x = \pm 2$는 수직 점근선(vertical asymptote)이다.



소문항 (iii)

양의 x축, y축, 그리고 A로 둘러싸인 유한한 영역은 $x = 0$과 $x = \sqrt{3}$ 사이의 아치 모양 부분이며, 이 구간에서 $y = \ln(4 - x^2) \geq 0$이다. 그 넓이는

$$\int_0^{\sqrt{3}} \ln(4 - x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{3}} \ln(2 - x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\sqrt{3}} \ln(2 + x)\,\mathrm{d}x,$$

이다. 여기서 $\ln(4 - x^2) = \ln(2 - x) + \ln(2 + x)$를 이용했는데, 이 구간에서는 두 인수가 모두 양수이므로 이 식이 성립한다. 소문항 (i)에 의해

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \ln(2 - x)\,\mathrm{d}x &= \Big[-(2 - x)\ln(2 - x) + (2 - x)\Big]_0^{\sqrt{3}} \\ &= -(2 - \sqrt{3})\ln(2 - \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) + 2\ln 2 - 2 \\ &= -(2 - \sqrt{3})\ln(2 - \sqrt{3}) - \sqrt{3} + 2\ln 2,\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \ln(2+x)\,\mathrm{d}x &= \Big[(2+x)\ln(2+x)-(2+x)\Big]_0^{\sqrt{3}}\\ &= (2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})-2\ln 2+2\\ &= (2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}-2\ln 2.\end{aligned}$$

이다.

? **생각해 보기** $\ln(2-\sqrt{3})$과 $\ln(2+\sqrt{3})$을 어떻게 하나로 합칠 수 있을까?

$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=4-3=1$이므로 $\ln(2-\sqrt{3})=-\ln(2+\sqrt{3})$이다. 두 적분을 더하면 $\ln 2$ 항이 소거되어

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x &= (2-\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3}\\ &= 4\ln(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3},\end{aligned}$$

이 되고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (iv)

$|x|<2$에서 B는 두 점근선 사이에 있는 A의 부분 중 x축 아래에 있는 조각을 위로 대칭이동한 것이다. 그래프 개형에 따르면 $|x|\le\sqrt{3}$에서 $\ln(4-x^2)\ge 0$이고, $\sqrt{3}<|x|<2$에서 $\ln(4-x^2)<0$이다. 대칭성을 이용하면 구하는 넓이는

$$2\left[\int_0^{\sqrt{3}} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x-\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x\right].$$

이다. 두 번째 적분은 피적분함수가 $x=2$에서 $-\infty$로 발산하므로 이상적분(improper integral)이다. 따라서 $x=2-\varepsilon$까지 적분한 뒤 $\varepsilon\to 0^+$으로 보낸다. (i)에서 구한 $\ln(2-x)$의 부정적분에 $x=2-\varepsilon$을 대입하면

$$-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon\to 0,$$

을 얻는데, 이는 $t\to 0$일 때 $t\ln t\to 0$이라는 주어진 사실에서 나온다. 따라서 위끝에서의 값은 0이고,

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(2-x)\,\mathrm{d}x &= 0-\Big[-(2-\sqrt{3})\ln(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\Big]\\ &= -(2-\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-2+\sqrt{3},\end{aligned}$$

이다. 여기서도 $\ln(2-\sqrt{3})=-\ln(2+\sqrt{3})$을 이용했다. 다른 조각은 보통의 적분이다.

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(2+x)\,\mathrm{d}x &= (4\ln 4-4)-\Big[(2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})\Big]\\ &= 8\ln 2-2+\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

두 식을 더하면

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x = 8\ln 2 - 4 + 2\sqrt{3} - 4\ln(2+\sqrt{3}),$$

이고, 이 값은 약 -0.259로 예상대로 음수이다. 따라서 넓이는

$$\begin{aligned} &2\Big[\big(4\ln(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}\big) - \big(8\ln 2 - 4 + 2\sqrt{3} - 4\ln(2+\sqrt{3})\big)\Big] \\ &\quad = 16\ln(2+\sqrt{3}) - 16\ln 2 + 8 - 8\sqrt{3} \\ &\quad = 16\ln\Big(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\Big) + 8 - 8\sqrt{3} \approx 4.125. \end{aligned}$$

이다.

검산

- $[0,\sqrt{3}]$과 $[\sqrt{3},2]$에서의 두 적분을 더하면 $\int_0^2 \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x = 8\ln 2 - 4 \approx 1.545$이다. 이 값은 (i)로부터 한 줄 만에 바로 얻을 수도 있다. $x=0$에서 두 부정적분의 값은 $-2\ln 2 + 2$와 $2\ln 2 - 2$로, 서로 소거되기 때문이다.
- (iii)의 넓이는 $4\ln(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3} \approx 1.804$이다. 이는 아치를 둘러싸는 직사각형의 넓이 $\sqrt{3}\times\ln 4 \approx 2.40$보다 작으며, 당연히 그래야 한다.
- $(-2,2)$에서 $\big|\ln|x^2-4|\big|$를 수치적분(numerical integration)하면 4.1246이 나오며, 이는 $16\ln\big(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\big) + 8 - 8\sqrt{3} = 4.12457\ldots$과 일치한다.

흔한 실수

- $x=\sqrt{3}$과 $x=2$ 사이의 곡선 부분이 x축 아래에 있다는 것을 잊고, 부호가 있는 적분값을 빼는 대신 더하는 실수.
- $\ln(2-\sqrt{3})$을 합치지 않고 그대로 두는 실수. 답을 깔끔하게 만들어 주는 것은 항등식 $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$이다.
- 아무 설명 없이 $(2-x)\ln(2-x)$에 $x=2$를 그냥 대입하는 실수. 이 식은 그 점에서 정의되지 않으며, 값 0을 정당화하는 것은 극한 $t\ln t \to 0$이다.

STEP 너머

(iv)의 적분은 **이상적분**이다. 피적분함수는 유계가 아니지만, 로그가 매우 천천히 발산하여 $t\ln t \to 0$이 되므로 넓이는 유한하다. 대학에서는 이를 엄밀하게 다루며, 유계가 아

닌 g에 대해 $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$가 정확히 언제 수렴하는지 판정하게 된다(예를 들어 $\int_0^1 t^{-p}\,\mathrm{d}t$는 $p < 1$일 때, 그리고 그때에만 수렴한다). Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 $t \ln t \to 0$ 같은 극한과 적분의 정의를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.