풀이

STEP I 2014, 문제 12

확률과 통계 • 이산확률변수

> **STEP I 2014, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q12

핵심 아이디어

제곱하면 절댓값(modulus) 기호가 사라지므로, $\mathrm{E}(X^2)$를 구하는 데에는 주사위 눈 S에 대한 $\mathrm{E}(S)$와 $\mathrm{E}(S^2)$만 있으면 되고, 이를 동전의 두 결과에 대해 평균하면 된다. 그러면 정수 조건은 $(k-1)^2$에 대한 나누어떨어짐(divisibility) 문제로 바뀌고, 한 자리 수 후보는 거의 남지 않는다. k를 알고 나면 X는 다섯 개의 값만 가지므로, 두 판짜리 게임은 순서쌍 몇 개를 나열하는 것으로 끝난다.

풀이

$\mathrm{E}(X^2)$ 구하기

주사위에 나온 수를 S라 하면

$$\mathrm{P}(S=1)=\tfrac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(S=2)=\tfrac{1}{3}, \qquad \mathrm{P}(S=3)=\tfrac{1}{6}.$$

이다. 따라서

$$\mathrm{E}(S)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{3}{6}=\tfrac{5}{3}, \qquad \mathrm{E}(S^2)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{4}{3}+\tfrac{9}{6}=\tfrac{10}{3}.$$

이다. 동전은 공정하고 주사위와 독립(independent)이다. $|a|^2=a^2$이므로 앞면이 나왔을 때 $X^2=(kS-1)^2$이고, 뒷면이 나왔을 때 $X^2=(k-S)^2$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2) &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}[(kS-1)^2]+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}[(k-S)^2]\\ &= \tfrac{1}{2}[k^2\mathrm{E}(S^2)-2k\mathrm{E}(S)+1]+\tfrac{1}{2}[k^2-2k\mathrm{E}(S)+\mathrm{E}(S^2)]\\ &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{10}{3}k^2-\tfrac{10}{3}k+1+k^2-\tfrac{10}{3}k+\tfrac{10}{3}\right]\\ &= \frac{13k^2-20k+13}{6}.\end{aligned}$$

이다. 한편

$$k + \frac{13(k-1)^2}{6} = \frac{6k + 13k^2 - 26k + 13}{6} = \frac{13k^2 - 20k + 13}{6},$$

이므로 요구한 대로 $\mathrm{E}(X^2) = k + \frac{13}{6}(k-1)^2$이다.

k 구하기

k가 정수이므로, $\mathrm{E}(X^2)$가 정수일 필요충분조건은 6이 $13(k-1)^2$을 나누는 것이다. 13은 6과 서로소(coprime)이므로 이는 $6 \mid (k-1)^2$, 즉 2와 3이 모두 $(k-1)^2$을 나눈다는 뜻이다. 2와 3은 소수(prime)이므로 각각 $k-1$ 자체를 나누어야 하고, 따라서 $6 \mid k-1$이다. $1 \le k \le 9$이므로 $k = 1$ 또는 $k = 7$만 남는다.

> **생각해 보기** 두 후보 모두 $\mathrm{E}(X^2)$를 정수로 만든다. 어느 조건이 하나를 배제하는가?

$\mathrm{E}(X)$에 대한 조건이 배제한다. $k = 1$이면 두 규칙 모두 $X = |S-1| = S-1$을 주므로 $\mathrm{E}(X) = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$이고, 이는 정수가 아니다.

$k = 7$이면 모든 눈에 대해 $7S - 1 > 0$이고 $7 - S > 0$이므로 절댓값 기호를 없앨 수 있다.

$$\mathrm{E}(X) = \tfrac{1}{2}(7 \cdot \tfrac{5}{3} - 1) + \tfrac{1}{2}(7 - \tfrac{5}{3}) = \tfrac{16}{3} + \tfrac{8}{3} = 8,$$

이고 $\mathrm{E}(X^2) = 7 + \frac{13}{6} \cdot 36 = 85$이다. 둘 다 양의 정수이므로 $k = 7$이다.

X의 분포

$k = 7$일 때, 앞면이면 $X = 7S - 1 \in \{6, 13, 20\}$이고 뒷면이면 $X = 7 - S \in \{6, 5, 4\}$이다. (동전, 주사위)의 각 조합의 확률은 $\frac{1}{2}\mathrm{P}(S = s)$이고, 값 6은 앞면이면서 $S = 1$인 경우와 뒷면이면서 $S = 1$인 경우 모두에서 나온다.

x	4	5	6	13	20
$\mathrm{P}(X = x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

확률의 합은 1이다.

두 판짜리 게임

두 판의 결과를 X_1, X_2라 하자. 각 판마다 주사위를 새로 굴리고 동전을 새로 던지므로 둘은 독립이고, 각각 위의 분포를 따른다. 합이 25보다 큰 순서쌍과 합이 정확히 25인 순서쌍을 구해야 한다.

> **생각해 보기** 합이 25를 넘는 순서쌍을 빠짐없이 나열하려면 어떻게 해야 하는가?

더 큰 값을 기준으로 분류한다. 어느 결과도 20이 아니면 가능한 가장 큰 합은 $13+13=26$이고, $13+6=19$는 이미 너무 작으므로 그러한 순서쌍은 $(13,13)$뿐이다. 한 결과가 20이면 다른 결과는 5보다 커야 하므로 6, 13, 20 중 하나이고, 다른 결과가 5이면 합이 정확히 25가 된다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_1+X_2>25) &= \mathrm{P}(13,13)+2\,\mathrm{P}(20,6)+2\,\mathrm{P}(20,13)+\mathrm{P}(20,20)\\ &= \tfrac{1}{36}+2\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{2}+2\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{144}\\ &= \frac{4+12+4+1}{144}=\frac{7}{48},\end{aligned}$$

이다. 여기서 인수 2는 두 가지 순서를 센 것이다. 마찬가지로

$$\mathrm{P}(X_1+X_2=25)=2\,\mathrm{P}(20,5)=2\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{6}=\tfrac{1}{36}.$$

이다. 따라서 도박꾼이 받을 것으로 기대되는 금액은 파운드 단위로

$$\frac{7w}{48}+\frac{1}{36}.$$

이다.

이 값이 판돈 £1보다 작을 때 게임은 카지노에 유리하다.

$$\frac{7w}{48}+\frac{1}{36}<1 \iff \frac{7w}{48}<\frac{35}{36} \iff w<\frac{35\cdot 48}{36\cdot 7}=\frac{20}{3}.$$

w는 정수이므로 가능한 가장 큰 값은 $w=6$이다. $\frac{20}{3}$은 정수가 아니므로, 공정한 게임(기대 지급액이 정확히 £1)을 허용하든 허용하지 않든 답은 같다.

검산

- 표에서 $\mathrm{E}(X)=\frac{4+10+36+26+20}{12}=8$이고 $\mathrm{E}(X^2)=\frac{16+50+216+338+400}{12}=85$이므로 공식과 일치한다.
- $w=6$이면 기대 지급액은 $\frac{7}{8}+\frac{1}{36}=\frac{65}{72}\approx$ £0.90으로 판돈보다 작고, $w=7$이면 $\frac{151}{144}\approx$ £1.05로 판돈보다 크다.
- 두 판짜리 게임 2×10^5번을 컴퓨터로 모의실험한 결과, 합이 25를 넘은 경우는 약 14.5%($\frac{7}{48}\approx 14.6\%$), 정확히 25인 경우는 약 2.8%($\frac{1}{36}\approx 2.8\%$)였다.

흔한 실수

- 분포에서 $X=6$을 앞면에 대해 한 번, 뒷면에 대해 한 번, 두 번 나열하고 이를 합쳐 $\mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{2}$로 쓰지 않는 것.

- $(20, 6)$처럼 서로 다른 값으로 이루어진 순서쌍의 두 가지 순서에 대한 인수 2를 빠뜨리는 것.
- "합이 25"인 경우를 £w를 따는 것이나 잃는 것으로 처리하는 것: 도박꾼은 판돈을 돌려받을 뿐이다.

STEP 너머

$\mathrm{E}(X^2)$의 계산은 전체 기댓값의 법칙(law of total expectation) $\mathrm{E}(Y) = \sum_i \mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{E}(Y \mid A_i)$의 한 예로, 대학 1학년 확률론 강의에서 끊임없이 쓰인다. 두 판짜리 게임은 독립인 확률변수들의 합의 분포, 즉 합성곱(convolution)에 관한 것이며, 생성함수(generating function)를 쓰면 깔끔하게 다룰 수 있다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)에서 두 아이디어를 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.