풀이

STEP I 2014, 문제 11

역학 • 연결된 도르래 계

> **STEP I 2014, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q11

핵심 아이디어

각 줄마다 장력(tension)을 하나씩 두고 각 입자에 대해 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙을 쓴 다음, 줄의 구속 조건(constraint)으로부터 모든 입자의 가속도(acceleration)를 구한다. 계 II에서 중요한 사실은 도르래(pulley) P_1이 **가볍다**는 것이다. 즉 P_1에 작용하는 알짜힘은 0이어야 하며(그렇지 않으면 가속도가 무한대가 된다), 따라서 위쪽 줄의 장력은 정확히 아래쪽 줄 장력의 두 배이다. 이것만 확인하면 P_1과 거기에 매달린 두 입자는 M에 대하여 질량 4μ인 입자 하나와 똑같이 작용한다.

풀이

풀이 전체에서 입자는 질점(point mass)으로, 줄은 가볍고 늘어나지 않는(inextensible) 것으로, 도르래는 매끄럽고 가벼운 것으로 모형화한다. 따라서 장력은 각 줄의 어느 곳에서나 같다.

소문항 (i)

줄의 장력을 T라 하자. 줄은 늘어나지 않으므로, M이 가속도 a_1로 아래로 가속하면 m은 가속도 a_1로 위로 가속한다. 운동 방향을 양의 방향으로 잡고 각 입자에 뉴턴의 운동 제2법칙을 적용하면

$$\begin{aligned} M: &\quad Mg - T = Ma_1, \\ m: &\quad T - mg = ma_1. \end{aligned}$$

두 식을 더하면 $(M-m)g = (M+m)a_1$이므로

$$a_1 = \frac{M-m}{M+m}\,g,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 이를 m에 대한 식에 대입하면

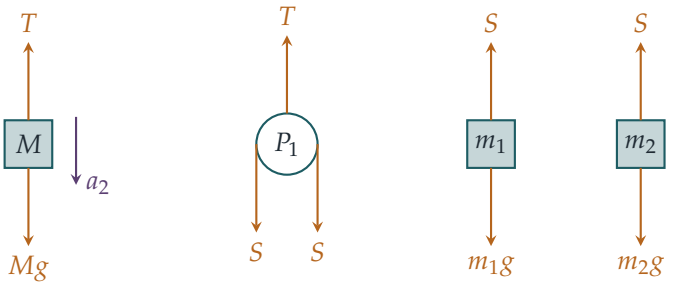
$$T = m(g+a_1) = m\cdot\frac{2M}{M+m}\,g = \frac{2Mmg}{M+m}.$$

줄의 두 직선 부분은 모두 도르래에서 연직 아래로 내려가며 각각 장력 T로 당기므로, 장력 때문에 도르래가 받는 힘은

$$2T = \frac{4Mmg}{M+m} \quad \text{연직 아래 방향.}$$

소문항 (ii)

고정 도르래 P에 걸린 줄의 장력을 T, P_1에 걸린 줄의 장력을 S라 하자.



가벼운 도르래. P_1에 작용하는 힘은 위쪽으로 T, 아래쪽으로 $2S$이다(자체 무게는 0이다). 질량이 0이므로 $T-2S = 0\cdot(\text{가속도}) = 0$이고, 따라서

$$T = 2S.$$

? **생각해 보기** m_1과 m_2의 가속도는 M의 가속도와 어떤 관계인가?

위쪽 줄은 늘어나지 않으므로, M이 가속도 a_2로 아래로 가속하면 P_1은 가속도 a_2로 **위로** 가속한다. 아래쪽 줄은 P_1**에 대한** m_1과 m_2의 상대 운동만 정해 준다. 즉 m_1이 P_1에 대하여 가속도 b로 아래로 가속하면, m_2는 P_1에 대하여 가속도 b로 위로 가속한다. 여기에 P_1의 운동을 더하면 실제 가속도는

$$m_1 :\ b-a_2 \text{ 아래 방향}, \qquad m_2 :\ b+a_2 \text{ 위 방향}.$$

여기서 b는 두 번째 미지수이며, 나중에 소거할 것이다.

운동 방정식.

$$\begin{aligned} M: &\quad Mg - 2S = Ma_2, \\ m_1: &\quad m_1 g - S = m_1(b - a_2), \\ m_2: &\quad S - m_2 g = m_2(b + a_2). \end{aligned}$$

m_1에 대한 식을 m_1로, m_2에 대한 식을 m_2로 나누면

$$g - \frac{S}{m_1} + a_2 = b = \frac{S}{m_2} - g - a_2.$$

따라서

$$2(g + a_2) = S\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = S\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \frac{S}{\mu},$$

이므로 $S = 2\mu(g + a_2)$이고 $T = 2S = 4\mu(g + a_2)$이다. 이를 M에 대한 식에 대입하면

$$Mg - 4\mu g - 4\mu a_2 = Ma_2 \quad \Longrightarrow \quad (M + 4\mu)a_2 = (M - 4\mu)g,$$

이고, 그러므로

$$a_2 = \frac{M - 4\mu}{M + 4\mu}\,g,$$

이며, 이것이 구하려던 결과이다. 이를 소문항 (i)과 비교해 보자. M은 마치 질량 4μ인 입자 하나와 맞서 매달려 있는 것과 똑같이 움직인다.

a_1과 a_2는 언제 같은가? $x > 0$에 대하여 $f(x) = \dfrac{M - x}{M + x}$라 두면 $a_1 = f(m)\,g$이고 $a_2 = f(4\mu)\,g$이다.

$$f(x) = \frac{2M}{M + x} - 1$$

이고 $M > 0$이므로, f는 $x > 0$에서 순감소(strictly decreasing)하며, 따라서 일대일(one-to-one)이다. 그러므로 $a_1 = a_2$일 필요충분조건은 $m = 4\mu$이다. $m = m_1 + m_2$이므로 이 조건은

$$m_1 + m_2 = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} \iff (m_1 + m_2)^2 = 4m_1 m_2 \iff (m_1 - m_2)^2 = 0 \iff m_1 = m_2,$$

가 된다. 여기서 첫 단계는 $m_1 + m_2 > 0$을 곱하는 것이므로 거꾸로도 성립한다. 이로써 양방향의 증명이 완성된다.

검산

- $m_1 = m_2$이면 계 II의 아래쪽 부분이 균형을 이루므로 $b = 0$이다. 즉 P_1과 거기 매달린 입자들은 질량 $m_1 + m_2$인 한 물체처럼 움직이고, 계 II는 계 I로 바뀐다. 이는 이 경우 $4\mu = m_1 + m_2$라는 사실과 일치한다.

- $m_2 \to 0$이면 $\mu \to 0$이고 $a_2 \to g$이다. m_1은 그냥 떨어질 뿐 장력을 받지 않으므로, M을 붙잡아 줄 무거운 것이 없다. 타당하다.
- 소문항 (ii)의 장력 $T = 4\mu(g + a_2)$는 소문항 (i)로부터도 구할 수 있다. P_1이 고정되어 있다면 그것이 받는 힘은 $4m_1m_2g/(m_1 + m_2) = 4\mu g$이다. 위로 a_2만큼 가속하는 것은 g를 $g + a_2$로 바꾸는 것일 뿐이다.
- 수치로 확인해 보면, $M = 3, m_1 = 1, m_2 = 2$일 때 $\mu = \frac{2}{3}$이고 $a_2 = \frac{1}{17}g \approx 0.576\,\mathrm{m\,s^{-2}}$이다($g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$일 때). 네 방정식을 직접 풀어도 같은 값이 나온다.

흔한 실수

- P_1이 움직인다는 사실을 잊고 m_1과 m_2의 가속도를 $b - a_2$와 $b + a_2$ 대신 $\pm b$로 쓰는 것.
- 가벼운 도르래 양쪽에서 $T = S$를 쓰는 것. P_1의 양쪽이 각각 S로 아래로 당기므로, 그 위의 줄은 $2S$를 견뎌야 한다.
- 이유를 밝히지 않고 $a_1 = a_2 \Rightarrow m = 4\mu$라고 결론짓는 것. 이를 위해서는 f가 일대일이어야 한다.

STEP 너머

이 장치는 앳우드 기계(Atwood machine) 안에 들어 있는 앳우드 기계이며, $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$는 **환산 질량**(reduced mass)이다. 이는 행성과 그 항성처럼 이체 문제(two-body problem)를 하나의 물체에 대한 문제로 환원할 때 나타나는 바로 그 양이다. 이와 같은 구속 조건이 있는 계는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)으로 가장 깔끔하게 다룰 수 있다. 라그랑주 역학은 독립 좌표(여기서는 P_1의 높이와 그에 대한 m_1의 상대 위치)를 직접 다루며 장력은 전혀 필요로 하지 않는다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 도르래 계를 꼼꼼히 다루고, 이어서 이체 문제의 환산 질량까지 나아간다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.