풀이

STEP I 2014, 문제 10

역학 • 충돌과 반발계수

> **STEP I 2014, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q10

핵심 아이디어

두 소문항 모두 자유 비행 구간에는 에너지(energy) 보존을, 각 충돌에는 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law)을 쓰면 된다. 소문항 (ii)의 요령은 공과 공이 충돌하는 순간의 상황을 알아차리는 것이다. 큰 공은 방금 방향을 바꾸었고, 작은 공은 아직 최고 속력으로 내려오고 있다. 그래서 두 공은 큰 접근 속력으로 만나고, 무거운 아래쪽 공은 가벼운 공을 처음 높이보다 훨씬 높이 튕겨 올릴 수 있다. 그다음은 방정식 두 개로 이루어진 충돌 문제이며, 주어진 수치 덕분에 속력의 비가 깔끔하게 나온다.

풀이

두 공을 연직 방향으로만 움직이는 균일한 강체 구로 모형화하고, 공기 저항은 없으며 g를 중력 가속도로 둔다. 각 충돌은 순간적으로 일어나므로 충돌하는 동안 중력은 운동량을 바꾸지 않는다.

소문항 (i)

공은 중심의 높이가 R일 때 땅에 닿으므로, 그때까지 거리 H만큼 떨어진다. 에너지 보존(conservation of energy)에 의해 충돌 직전의 속력은

$$u = \sqrt{2gH}.$$

땅은 고정되어 있으므로 뉴턴의 실험 법칙에 의해 튀어 오르는 속력은 위쪽으로 eu이다. 그다음 공은 멈출 때까지 올라간다. 다시 에너지를 이용하면 공은 추가로

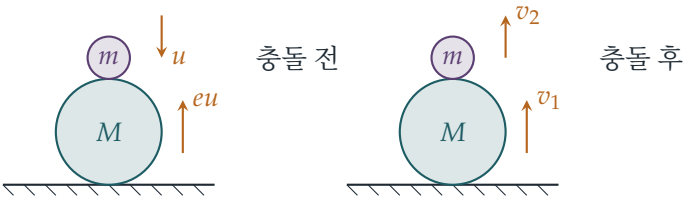
$$\frac{(eu)^2}{2g} = \frac{e^2 \cdot 2gH}{2g} = e^2 H.$$

만큼 올라간다. 이 상승은 중심이 높이 R인 곳에서 시작하므로, 공은 땅에서 높이 $R + He^2$에 이른다. 이것이 보이려던 결과이다.

소문항 (ii)

두 공은 정지 상태에서 함께 자유 낙하하므로 매 순간 같은 속력을 가진다. 아래쪽 공은 중심이 H만큼 떨어진 뒤 땅에 닿으므로, 그 순간 두 공은 모두 $u = \sqrt{2gH}$의 속력으로 아래로 움직이고 있다. 아래쪽 공은 튀어 올라 소문항 (i)에서처럼 위쪽으로 속력 eu로 땅을 떠나고, 그 직후 아직 u의 속력으로 내려오고 있는 위쪽 공과 만난다.

위쪽을 양의 방향으로 잡고, 두 공이 충돌한 직후의 속도를 v_1(질량 M인 공), v_2(질량 m인 공)라 하자.



운동량 보존(conservation of momentum)에 의해

$$Meu - mu = Mv_1 + mv_2,$$

이고, 뉴턴의 실험 법칙(분리 속력(speed of separation)은 접근 속력(speed of approach)의 e배이며, 여기서 접근 속력은 $eu + u$이다)에 의해

$$v_2 - v_1 = e(1 + e)u.$$

이다. $v_1 = v_2 - e(1 + e)u$를 운동량 방정식에 대입하면

$$\begin{aligned}(M + m)v_2 &= Meu - mu + Me(1 + e)u \\ &= (Me(2 + e) - m)u,\end{aligned}$$

이므로

$$v_2 = \frac{Me(2 + e) - m}{M + m}u.$$

? 생각해 보기 충돌이 일어날 때 작은 공의 중심은 어디에 있는가?

충돌은 튀어 오른 직후에 일어나므로 큰 공은 아직 땅에 닿아 있다. 큰 공의 중심은 높이 R, 꼭대기는 $2R$에 있고, 작은 공의 중심은 $2R + r$에 있다. 작은 공은 거기서 추가로 $v_2^2/(2g)$만큼 올라가므로

$$h = 2R + r + \frac{v_2^2}{2g}.$$

이다. 주어진 값을 넣으면 $2R + r = 0.45$이므로 $v_2^2/(2g) = 4.05$이고, $u^2/(2g) = H = 1.8$이다. 나누면

$$\frac{v_2^2}{u^2} = \frac{4.05}{1.8} = \frac{9}{4}, \qquad \text{따라서} \qquad v_2 = \tfrac{3}{2}u,$$

이다. 작은 공은 충돌 후 위로 움직이므로 양의 제곱근을 택했다.

$e = \frac{2}{3}$이면 $e(2+e) = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{9}$이다. $k = M/m$으로 두고 분자와 분모를 m으로 나누면

$$\frac{\frac{16}{9}k - 1}{k+1} = \frac{3}{2} \implies \tfrac{32}{9}k - 2 = 3k + 3 \implies \tfrac{5}{9}k = 5,$$

이므로

$$\frac{M}{m} = 9.$$

검산

- $M/m = 9$이면 $v_2 = \frac{3}{2}u$, $v_1 = v_2 - \frac{10}{9}u = \frac{7}{18}u$이다. 충돌 전 운동량은 $9m \cdot \frac{2}{3}u - mu = 5mu$이고, 충돌 후 운동량은 $9m \cdot \frac{7}{18}u + m \cdot \frac{3}{2}u = 5mu$이다. 두 값이 일치한다.
- $v_1 < v_2$이므로 충돌 후 두 공은 멀어진다. 당연히 그래야 한다.
- 수치로 확인하면 $u = \sqrt{2 \times 9.8 \times 1.8} \approx 5.94\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $v_2 \approx 8.91\,\mathrm{m\,s^{-1}}$이고, 이 속력으로 $4.05\,\mathrm{m}$ 올라가므로 $h = 4.5$이다.
- $M \gg m$이면 $v_2 \to e(2+e)u$이다. $e = 1$이면 이는 $3u$이며, 완전 탄성 "쌓은 공" 낙하에서 높이가 아홉 배가 된다는 잘 알려진 결과와 같다.

흔한 실수

- 충돌이 작은 공의 중심이 $2R + r$에 있을 때 일어난다는 것을 잊고, 땅에서 잰 최종 높이를 $v_2^2/(2g)$만으로 계산하는 실수.
- 분리 속력으로 $e \cdot 2u$나 eu를 쓰는 실수. 두 공이 서로를 향해 움직이므로 접근 속력은 $eu + u$이다.
- 부호 실수. 위쪽을 양의 방향으로 고정하고, 충돌 전 위쪽 공의 속도를 $-u$로 두어야 한다.

STEP 너머

쌓은 공 낙하는 운동량이 가벼운 물체로 어떻게 몰릴 수 있는지를 보여 주는 멋진 실험이다. 아래 공보다 각각 가벼운 공 여러 개를 탑처럼 쌓으면, 맨 위의 공은 놓은 높이의 몇

배나 되는 높이로 튀어 오를 수 있다. 이런 충돌을 분석하는 가장 깔끔한 방법은 영운동량(zero-momentum) 좌표계, 곧 질량중심(centre-of-mass) 좌표계에서 보는 것이다. 이 좌표계에서는 각 공의 속도가 그저 반대 방향으로 바뀌고 e배가 될 뿐이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌과 질량중심 좌표계를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.