풀이

STEP III 2013, 문제 9

역학 • 부력과 단진동

> **STEP III 2013, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q9

핵심 아이디어

구의 잠긴 부분은 구관(spherical cap)이고, 그 부피는 이를 원판으로 잘라서 구한다. 이는 회전체의 부피(volume of revolution)이다. 그다음부터 이 문제는 무게 외에는 부력(buoyancy)만이 작용하는 상황에서의 뉴턴(Newton)의 제2법칙이다. 작은 진동(small oscillations)을 다루기 위해 $x = x_0 + y$로 놓고, 우변의 삼차식을 평형점 근처에서 선형화(linearise)한 다음, $\ddot{y} = -\omega^2 y$ 꼴의 방정식에서 ω^2을 읽어 낸다.

풀이

밀려난 부피

구의 중심을 원점으로 잡고 z를 위쪽 방향으로 잰다. 그러면 액체의 수면은 평면 $z = -x$이고, 잠긴 부분은 공에서 $-R \le z \le -x$인 부분이다. 이는 $-R < x < R$일 때 의미가 있으므로 문제의 경우를 포함한다. 높이 z에서의 단면은 반지름이 $\sqrt{R^2 - z^2}$인 원판이므로

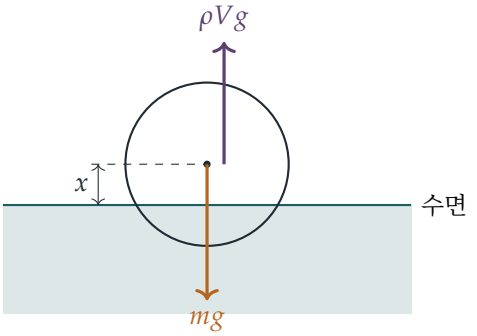
$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^{-x} \pi \left(R^2 - z^2\right) \mathrm{d}z = \pi \left[R^2 z - \tfrac{1}{3} z^3\right]_{-R}^{-x} \\ &= \pi \left(-R^2 x + \tfrac{1}{3} x^3 + R^3 - \tfrac{1}{3} R^3\right) = \frac{\pi}{3} \left(2R^3 - 3R^2 x + x^3\right), \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 부피이다.

운동 방정식

구를 연직 방향으로 움직이는 강체(rigid body)로 모형화한다. 수조가 크므로 구가 위아래로 흔들려도 수면의 높이는 변하지 않고, 따라서 $\ddot{x}$는 구의 위쪽 방향 가속도이다. 구의 질량은 $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s$이다. 구에는 두 힘이 작용한다. 아래쪽으로 작용하는 무게 mg와 위쪽으로

작용하는 부력 $\rho V g$이다.



위쪽을 양의 방향으로 하여 연직 방향으로 힘을 분해하면

$$m\ddot{x} = \rho V g - mg \quad \Longrightarrow \quad m\left(g + \ddot{x}\right) = \rho g V.$$

m과 V를 대입하면

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3 \rho_\mathrm{s}\left(g + \ddot{x}\right) = \tfrac{\pi}{3}\left(2R^3 - 3R^2 x + x^3\right)\rho g,$$

이고, 양변에 $3/\pi$를 곱하면

$$4R^3 \rho_\mathrm{s}\left(g + \ddot{x}\right) = \left(2R^3 - 3R^2 x + x^3\right)\rho g,$$

를 얻으므로 증명이 끝난다.

평형 상태의 밀도

평형 상태에서는 $\ddot{x} = 0$이다. $x = \frac{1}{2}R$을 대입하면

$$4R^3 \rho_\mathrm{s} g = \left(2R^3 - \tfrac{3}{2}R^3 + \tfrac{1}{8}R^3\right)\rho g = \tfrac{5}{8}R^3 \rho g,$$

이므로

$$\rho_\mathrm{s} = \frac{5}{32}\rho.$$

이 값은 마땅히 그래야 하듯이 $\frac{1}{2}\rho$보다 작다. 중심이 수면 위에 있으므로 구의 절반보다 적은 부분이 물에 잠기기 때문이다.

작은 진동

$f(x) = 2R^3 - 3R^2 x + x^3$이라 하고, y가 작을 때 $x = \frac{1}{2}R + y$로 놓는다. 그러면 $\ddot{x} = \ddot{y}$이다.

? **생각해 보기** 삼차식을 어떻게 y에 대한 일차식으로 바꿀 수 있을까?

f를 평형점 근처에서 전개하고 일차항까지만 남긴다. 즉 $f(\frac{1}{2}R+y) = f(\frac{1}{2}R) + f'(\frac{1}{2}R)\,y + O(y^2)$이다. 여기서

$$f'(x) = -3R^2 + 3x^2, \qquad f'(\tfrac{1}{2}R) = -3R^2 + \tfrac{3}{4}R^2 = -\tfrac{9}{4}R^2,$$

이고, 앞에서 $f(\frac{1}{2}R) = \frac{5}{8}R^3$이었다. $\rho_s = \frac{5}{32}\rho$를 이용하면 운동 방정식의 좌변은 $4R^3 \cdot \frac{5}{32}\rho\,(g+\ddot{y}) = \frac{5}{8}R^3\rho\,(g+\ddot{y})$이다. 따라서 일차 근사로

$$\tfrac{5}{8}R^3\rho\,(g+\ddot{y}) = \left(\tfrac{5}{8}R^3 - \tfrac{9}{4}R^2 y\right)\rho g.$$

$\frac{5}{8}R^3\rho g$ 항들은 서로 소거되고(이는 바로 평형 조건이다), 남는 것은

$$\tfrac{5}{8}R^3\ddot{y} = -\tfrac{9}{4}R^2 g\,y \quad\Longrightarrow\quad \ddot{y} = -\frac{18g}{5R}\,y.$$

이는 $\omega^2 = \dfrac{18g}{5R}$인 단진동(simple harmonic motion)이므로, 작은 진동의 주기(period)는

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{5R}{18g}}.$$

검산

- 부피: $x = R$이면 공식의 값은 0이고(수면에 막 닿는 경우), $x = 0$이면 $\frac{2}{3}\pi R^3$이며(구의 절반), $x = -R$이면 $\frac{4}{3}\pi R^3$이다(완전히 잠긴 경우).
- 차원(dimensions): $\omega^2 = 18g/(5R)$의 단위는 마땅히 그래야 하듯이 s^{-2}이다.
- 수치: $R = 1\,\mathrm{m}$, $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$이면 주기는 약 $1.06\,\mathrm{s}$이다. 작은 변위에서 출발하여 선형화하지 않은 원래 방정식을 컴퓨터로 단계별로 풀어 나가면, 10^4분의 1보다 더 작은 오차로 같은 주기를 얻는다.

흔한 실수

- 잠긴 구관의 높이를 $R - x$가 아니라 x로 잡는 것. x는 중심이 액체 **위로** 떨어진 높이이다.
- 복원력이 음수인 $f'(\frac{1}{2}R)$에서 나온다는 것을 잊는 것. 여기서 부호를 틀리면 $\ddot{y} = +\omega^2 y$가 되는데, 이는 전혀 진동이 아니다.
- 좌변에서 구 자체의 질량을 빠뜨리는 것. $\ddot{x}$에 곱해지는 것은 ρ가 아니라 ρ_s이다. (실제로 떠 있는 물체는 주변 액체의 일부를 함께 끌고 움직이는데, 이를 "부가 질량(added mass)"이라 한다. 이 문제에서는 이를 무시하라고 한다.)

STEP 너머

여기서 사용한 방법, 즉 힘을 평형점 근처에서 전개하여 일차항을 남기는 방법은 어떤 계든 작은 진동을 구하는 표준적인 방법이다. 일차항의 부호는 안정성(stability)을 알려 주고, 그 크기는 진동수를 알려 준다. 대학 1학년 과정에서 이는 $\ddot{x} = F(x)$의 선형화가 되고, 이어서 자유도가 여러 개일 때의 기준 진동(normal modes)에 대한 공부로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 평형점 근처의 작은 진동과 유체의 부력을 이 수준에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.